

**ПРОГНОЗУВАННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ І ПРОЕКТУВАННЯ  
ОПТИМАЛЬНИХ СКЛАДІВ САМОУЩІЛЬНЮВАЛЬНИХ  
БЕТОНІВ З ВИКОРИСТАННЯМ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ**

**PREDICTING PROPERTIES AND DESIGN OF SELF-COMPACTING  
CONCRETE OPTIMAL COMPOSITION USING MATHEMATICAL  
MODELS**

**Житковський В.В., к.т.н., доцент, ORCID: 0000-0003-1710-6082, Дворкін  
Л.Й., д.т.н., професор, ORCID: 0000-0001-8759-6318, Тимошчук О.С.,  
магістрант (Національний університет водного господарства та  
природокористування, м. Рівне)**

**Zhitkovsky V.V., candidate of technical sciences, senior lecturer, ORCID:  
0000-0003-1710-6082, Dvorkin L.J., doctor of technical sciences, professor,  
ORCID: 0000-0001-8759-6318, Tymoshchuk O.S., master degree student  
(National University of Water Management Environmental Engineering, Rivne)**

**Стаття присвячена проектуванню складу самоущільнюваних бетонів, що містять доменний гранульований шлак та суперпластифікатор полікарбоксилатного типу, у широкому діапазоні класів за міцністю. Здійснено багатопараметричну математичну оптимізацію складів самоущільнюваних бетонів з використанням отриманих моделей при умові мінімізації сумарної вартості бетону.**

The paper deals with composition design of self - compacting concrete containing blast furnace granulated slag and polycarboxylate type superplasticizer in a wide range of concrete strength classes. The method of mathematical experiment planning is used for obtaining data required to obtain multifactorial experimental-statistical models of the following concrete mix and hardened concrete properties: concrete mix water demand, workability retention after 2 hours, concrete compressive at different ages. Analysis of separate and joint influence of cement consumption, blast furnace granulated slag and superplasticizer contents on those properties is carried out. The optimal dosages of the superplasticizer, the consumption of cement and blast-furnace slag are established from the standpoint of the minimum water demand and W/C, the maximum workability retention of the self-compacting concrete mixture and the strength of concrete. A significant effect of the joint influence of the superplasticizer and blast-furnace slag has been established. Possibility of minimizing the cement consumption at optimal superplasticizer content and slag consumption of 100-120 kg/m<sup>3</sup> is shown.

**Multiparametric mathematical optimization of self-compacting concretes compositions using the obtained models under the condition of minimizing the total concrete cost is carried out. The methodology allows to determine the rational values of the main technological parameters depending on the specified properties of the SCC and the concrete mix.**

**Ключові слова:** планування, модель, бетон, самоущільнення, шлак, суперпластифікатор, водопотреба, життєздатність, міцність, оптимізація, склад.

planning, model, concrete, self-compaction, slag, superplasticizer, water consumption, workability retention, strength, optimization, composition.

**Вступ.** Завдяки розробці і впровадженню в технологічну практику ефективних суперпластифікуючих добавок стало можливим виробництво самоущільнювальних бетонів (СУБ). Ці високотехнологічні бетони забезпечують енергозбереження та високі фізико-механічні характеристики конструкцій особливо тонкостінних, густоармованих, складної конструкції, покращити екологічні параметри їх технології. Разом з тим необхідність забезпечення поряд з високою легкоукладальністю бетонної суміші її збережуваність в часі, підвищену швидкість набору міцності, високі значення всього комплексу експлуатаційних властивостей бетону ускладнює обґрунтування його складу, який поряд з технологічними критеріями повинен також забезпечувати і економічну доцільність.

Аналізуючи приведені в літературі [1-8] рекомендації щодо розробки складів СУБ слід зазначити, що вони носять здебільшого загальний характер і не пропонують необхідний алгоритм, що пропонує особливості постановки задачі і вид конкретних вихідних матеріалів. Очевидно, що розрахункові залежності, які доцільно використовувати при розрахунках складів бетонних сумішей повинні задовільно прогнозувати їх властивості при зміні визначальних технологічних факторів у заданому діапазоні. Такими залежностями можуть бути експериментально-статистичні моделі. Такі моделі доцільно отримувати на основі розроблених методів виконання т.зв. активних експериментів з допомогою методів їх планування з наступною статистичною обробкою і отримання адекватних рівнянь регресії [9].

СУБ є специфічним типом бетону, і методів для визначення його складу не існує. В рамках даного дослідження отримано набір експериментально-статистичних моделей бетонної суміші та властивостей затверділого бетону в залежності від основних технологічних факторів для бетону нормальної ваги на основі портландцементу з додаванням меленої шлаку та полікарбоксилатного суперпластифікатора. Основною **метою** даного дослідження є використання набору отриманих моделей для прогнозування властивостей бетону та розробки оптимальних композицій, які дозволяють забезпечити ці властивості.

## Матеріали та методи дослідження

При проведенні дослідження було використано наступні матеріали: цемент СЕМ I 42.5 (Дікергоф-Україна, м. Здолбунів), пісок з  $M_{kp}=2,0$ , щебінь 5...20 мм, доменний гранульований шлак (питома поверхня 2700 см<sup>2</sup>/г) (м. Кривий Ріг), суперпластифікатор полікарбоксилатного типу РСЕ50 (ТОВ Юейхемікал, Україна).

Характеристика вихідних матеріалів наведена в табл. 1-2.

Таблиця 1

### Хімічний склад вихідних матеріалів

Матеріал	Вміст оксидів, %									
	ВПП	SiO <sub>2</sub>	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	CaO	MgO	SO <sub>3</sub>	K <sub>2</sub> O	Na <sub>2</sub> O	CaO <sub>B</sub>
Портланд-цемент	-	21,80	5,32	4,11	66,80	0,95	0,63	0,54	0,42	-
Доменний шлак	-	39,52	6,49	0,12	47,13	3,10	1,74	-	-	-

Таблиця 2

### Технічні властивості портландцементу

Питома поверхня, м <sup>2</sup> /кг	Нормальна густота, %	Строки тужавлення, год-хв		Міцність, МПа, 28 діб	
		початок	кінець	згин	стиск
302	26,3	1-55	3-25	6,8	51,8

Дослідження проводились з використанням методу математичного планування експерименту [9, 10]. Був реалізований трирівневий план для трьох факторів типу В<sub>3</sub>, що дає змогу отримати поліноміальні рівняння другого порядку [11]. У якості варіюваних факторів були вибрані наступні: витрата портландцементу (Ц, кг/м<sup>3</sup> (Х<sub>1</sub>)), вміст суперпластифікатора (СП, % (Х<sub>2</sub>)) та витрата мінеральної добавки (доменного гранульованого шлаку) (Ш, кг/м<sup>3</sup> (Х<sub>3</sub>)). Умови планування наведені у табл. 3. Рухомість бетонної суміші в точках експерименту підтримувалась на рівні S5 (OK=260...270 мм, що відповідає розливу конуса 560...620 мм (F5 згідно EN 206-1:2000 [2])). Для бетонних сумішей визначали зміну рухомості у часі та втрату рухомості через 2 год ( $\Delta OK2$ , %). З бетонної суміші формували зразки куби 10×10×10 см. Визначали міцність при стиску ( $f_{cm}$ , МПа) у віці 1, 7, 28 діб.

**Результати експериментів та їх аналіз.** При проведенні дослідів відповідно до умов їх планування (табл. 3) склади бетонів змінювались виходячи з умови, що вміст щебеню у самоущільнюваному бетоні, згідно рекомендацій [1], повинен складати 0,3...0,35 об'єму бетонної суміші. В результаті статистичного аналізу результатів експерименту отримані математичні моделі вихідних параметрів, а також кореляційні залежності між окремими вихідними параметрами.

Таблиця 3

## Умови планування експерименту

№	Фактори			Рівні варіювання			Інтервал варіювання
	Натуральні		Кодовані	-1	0	+1	
1	Витрата цементу (Ц, кг/м <sup>3</sup> )		X <sub>1</sub>	200	400	600	200
2	Вміст суперпластифікатора (СП, %)		X <sub>2</sub>	0	0,5	0,1	0,5
3	Витрата доменного гранульованого шлаку (Ш, кг/м <sup>3</sup> )		X <sub>3</sub>	0	100	200	100

Загальний вид математичної моделі наведений нижче:

$$Y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_{11} X_1^2 + b_{22} X_2^2 + b_{33} X_3^2 + b_{12} X_1 X_2 + b_{13} X_1 X_3 + b_{23} X_2 X_3, \quad (1)$$

де Y – вихідний параметр, X<sub>1</sub>...X<sub>3</sub> – змінні, b<sub>0</sub>...b<sub>23</sub> – коефіцієнти рівняння

Коефіцієнти математичних моделей наведені у табл. 4.

Таблиця 4

Коефіцієнти експериментально-статистичних моделей вихідних параметрів

	b <sub>0</sub>	b <sub>1</sub>	b <sub>2</sub>	b <sub>3</sub>	b <sub>11</sub>	b <sub>22</sub>	b <sub>33</sub>	b <sub>12</sub>	b <sub>13</sub>	b <sub>23</sub>
В	123	30,23	-51,15	12,65	19,84	43,95	8,12	-21,92	6,79	-15,59
В/Ц	0,30	-0,21	-0,13	0,03	0,13	0,13	0,04	0,01	0	-0,05
ΔОК2	8,02	-1,37	-13,23	-4,01	2,00	6,52	0,12	-0,66	1,91	3,61
f <sub>cm1</sub>	23,6	11,67	7,71	-3,85	1,98	-8,67	-1,54	6,06	-4,63	-2,53
f <sub>cm7</sub>	58,5	20,85	19,22	-2,12	-4,01	-10,96	-2,80	10,61	-5,89	1,04
f <sub>cm28</sub>	74,3	21,51	19,00	-1,79	-6,81	-9,01	-11,56	7,11	-7,34	1,69

Вплив факторів складу бетонної суміші на їх властивості можна простежити за графічними залежностями, отриманими розрахунковим чином з використанням відповідних моделей (рис. 1-4).

Визначальним параметром складу самоущільнювальних бетонних сумішей є водопотреба до досягнення необхідної легкоукладальності. Завдяки високому водоредукуючому ефекту полікарбоксилатного суперпластифікатора можливо знижувати водопотребу бетонної суміші на 100...140 л/м<sup>3</sup> і відповідно зменшувати водоцементне відношення або необхідну витрату цементу при постійній витраті цементу (рис. 1).

Значні коефіцієнти взаємодії  $b_{12}$  та  $b_{23}$  в моделі вказують на суттєве підвищення водоредукуючого ефекту добавки з підвищеннем витрати цементу та доменного шлаку, тобто в'яжучої складової бетонної суміші (рис. 1). Переважно більш помітне підвищення водопотреби спостерігається при витраті цементу більше 400 кг/м<sup>3</sup>, тобто поза областю дії правила постійної водопотреби [12, 13]. Відповідно, при витраті цементу від 200 до 400 кг/м<sup>3</sup> водопотреба практично не змінюється. Досить високий водоредукуючий ефект добавки помітно нивелює негативний вплив збільшення вмісту дисперсних частинок у бетонній суміші.

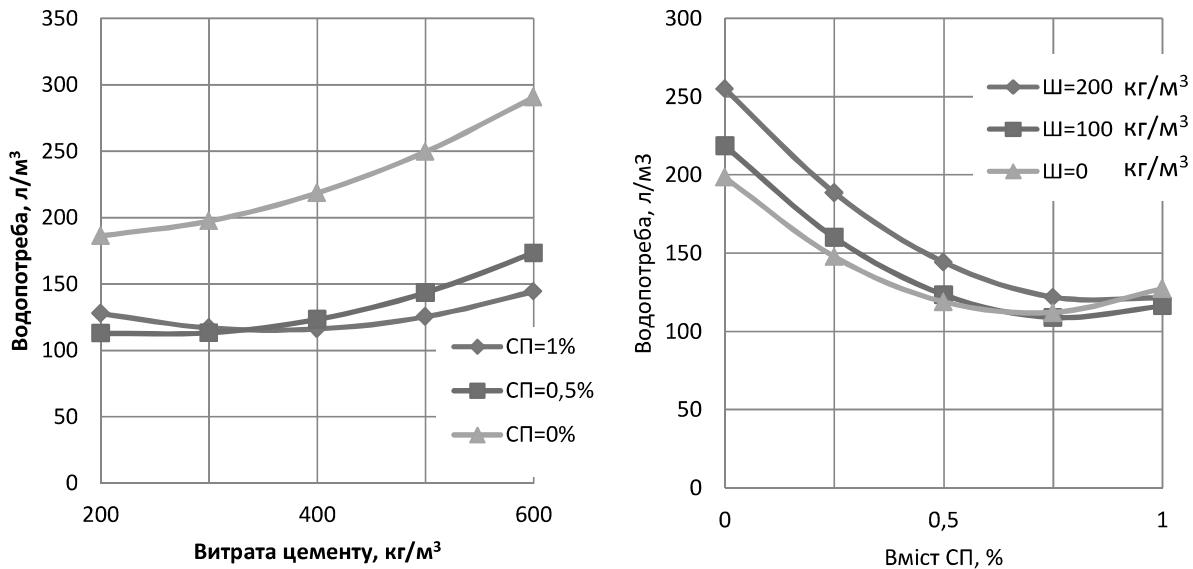


Рис. 1. Вплив витрати цементу та суперпластифікатора на водопотребу самоущільнюваних бетонних сумішей

Як показує експериментально-статистична модель В/Ц (табл. 4), даний показник під час експерименту змінювався у досить широких межах від 0,23 до 0,91, що було викликано значним діапазоном витрат цементу (від 200 до 600 кг/м<sup>3</sup>).

Життєздатність самоущільнованої бетонної суміші вивчали за зміною рухомості з часом. (рис. 2). Для якісної оцінки життєздатності прийняли показник зміни рухомості суміші через 2 години ( $\Delta\text{OK}2$ , %). Усі досліджувані фактори при переході з нижнього рівня на верхній сприяють зниженню зміни рухомості за 2 год., тобто сприяють підвищенню життєздатності самоущільнованої бетонної суміші. Найбільший вплив на збереження рухомості у часі спричиняє вміст СП ( $X_2$ ) – при переході з нижнього рівня на верхній спостерігається зміна життєздатності від 20...40% і до 0...1%. Як показують отримані результати підвищення вмісту доменного шлаку знижує ефективність суперпластифікатора як стабілізатора рухомості бетонної суміші (рис. 2). У свою чергу, у сумішах, які не містять СП, підвищення вмісту шлаку попереджує втрату рухомості.

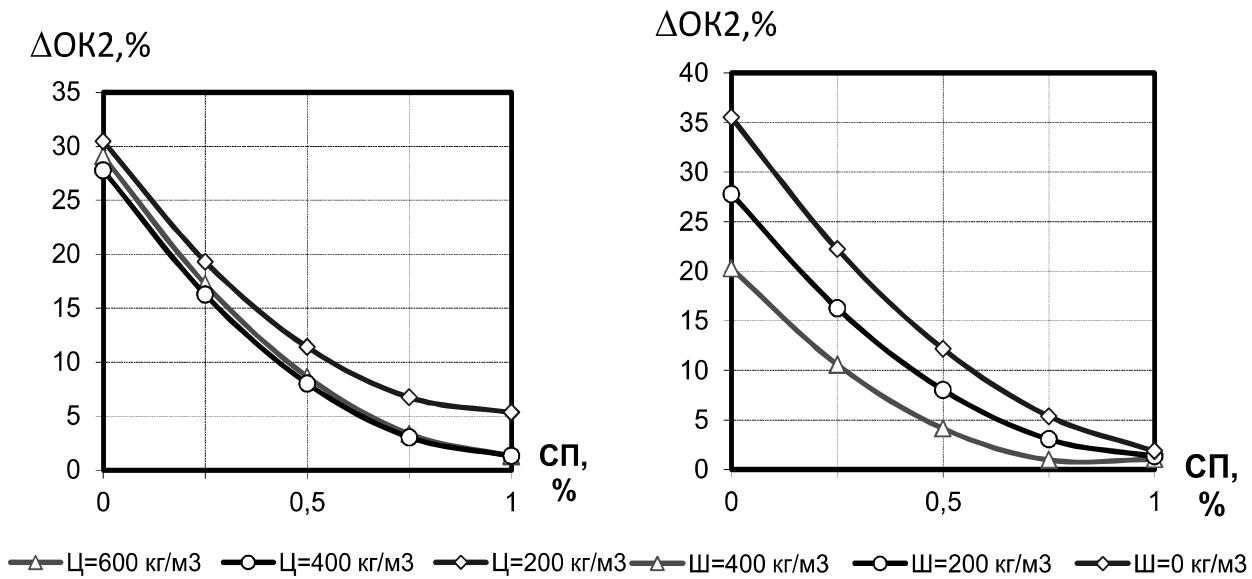


Рис. 2. Залежність втрати рухомості самоувільнюваної бетонної суміші за 2 год. ( $\Delta\text{OK}2, \%$ ) від вмісту суперпластифікатора

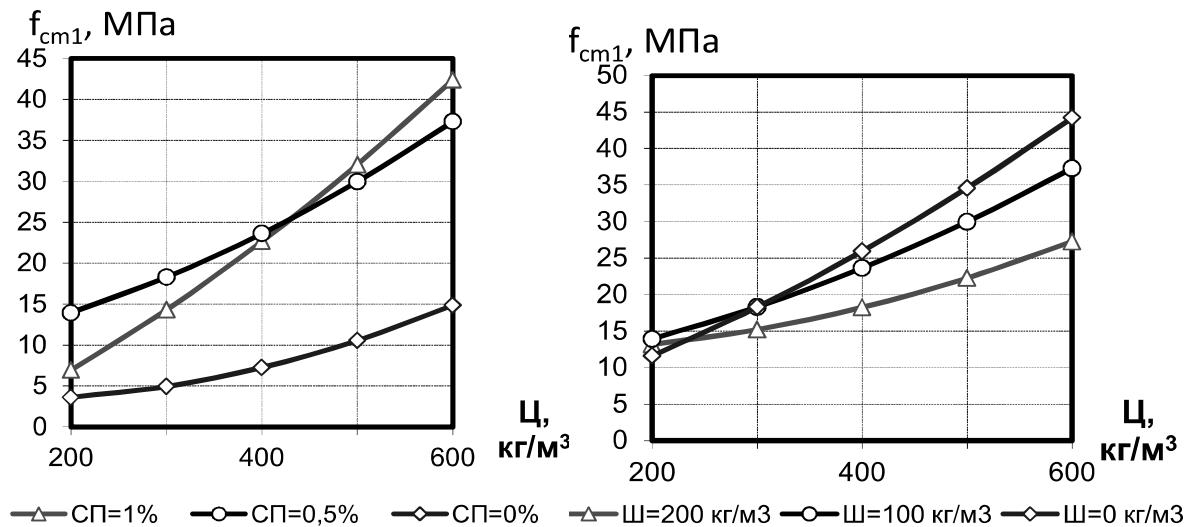


Рис. 3. Залежність міцності при стиску у віці 1 доба від витрати цементу

Як можна було очікувати, фактори  $X_1$  (витрати цементу) та  $X_2$  (вміст СП), які викликають значне зниження В/Ц, сприяють суттєвому підвищенню міцності. У математичних моделях (табл. 4) присутній значний коефіцієнт взаємодії цих факторів, за рахунок чого спостерігається значне збільшення міцності при одночасному підвищенні вмісту цих компонентів. Так підвищення витрати цементу у бетоні викликає зростання однодобової міцності  $f_{cm1}$  від 1,5...2 рази (коли СП у бетоні відсутній) до 5...7 разів (при максимальному вмісті РСЕ50) (рис. 3). Оптимум вмісту добавки СП значно пов'язаний з витратою цементу, - при мінімальному вмісті Ц для максимального підвищенння міцності достатньо 0,5% СП, при максимумі цементу – оптимальний вміст СП 0,8...1,1%. Також відчутина взаємодія витрати добавки і з іншим фактором – витратою доменного шлаку. В даному

випадку, з підвищенням вмісту шлаку, оптимальний вміст добавки СП і її ефективність дещо знижуються.

Для 28-добової міцності (рис. 4) стає більш помітним екстремальний вплив вмісту доменного шлаку при витраті цементу 600 кг/м<sup>3</sup> оптимальний вміст шлаку що забезпечує максимум міцності – становить 40...50 кг/м<sup>3</sup> і 120...150 кг/м<sup>3</sup> при витраті цементу 200 кг/м<sup>3</sup>.

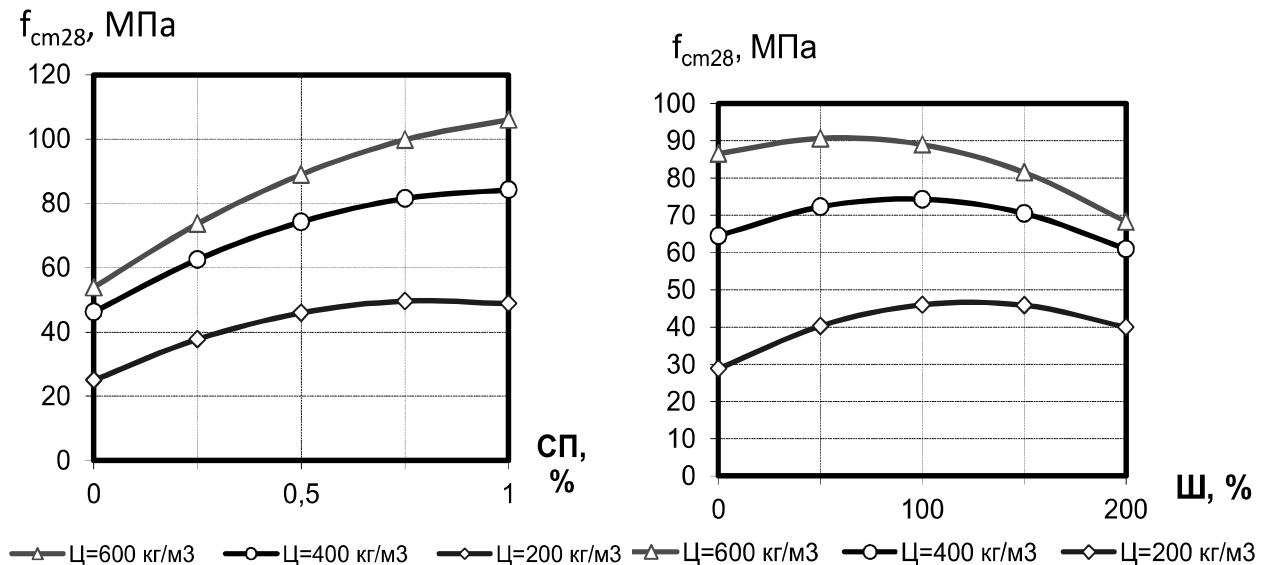


Рис. 4. Вплив вмісту СП та доменного шлаку при різних рівнях витрати цементу на міцність СУБ при стиску на 28-му добу (значення третього фактора на графіках на середньому рівні (табл. 3))

Комплекс отриманих експериментально-статистичних моделей СУБ (табл. 4) дав можливість провести математичну оптимізацію складів з метою забезпечення одночасно необхідних параметрів (багато параметричне проектування складів) з урахуванням сумарної мінімальної вартості компонентів бетону.

Оптимізацію виконували з використанням надбудови до програми MS Excel «Пошук рішення». Нижче наведено приклади рішення завдання оптимізації, де отримані значення досліджуваних факторів, при яких досягаються необхідні характеристики бетону при умові, що сумарна вартість компонентів бетону мінімальна.

**Завдання для оптимізації.** Зaproектувати склади самоущільнюваного бетону з рухомістю ОК=25...27 см класів за міцністю від С12/15 до С60/75. При виготовленні бетону застосовуються наступні сировинні матеріали: ПЦ I-500, пісок з  $M_{kp}=2,0$ , щебінь 5...20 мм, шлак доменний мелений, суперпластифікатор полікарбоксилатного типу РСЕ50 (ТОВ Юейхемікал). Частка щебеню у суміші заповнювачів 0,35 від об'єму бетонної суміші ( $\rho_{o.p.}=2,8$  кг/м<sup>3</sup>). У економічних розрахунках прийнята наступна вартість компонентів: портландцемент – 88EUR/т, доменний шлак - 27EUR/т; суперпластифікатор - 2,85EUR/т.

Результати оптимізації наведені у табл.5. Аналізуючи отримані результати оптимізаційних розрахунків слід відмітити, що досліджуваний

органо-мінеральний комплекс, котрий включає мелений гранульований доменний шлак та суперпластифікатор полікарбоксилатного типу, є дієвим чинником, котрий забезпечує отримання ресурсоекономних самоущільнюваних бетонів із заданою міцністю у широкому діапазоні класів. Так забезпечення міцності СУБ у діапазоні класів від С12/15 до С30/35 (табл.5) здійснюється виключно за рахунок збільшення вмісту доменного шлаку та суперпластифікатора при мінімально-можливих витратах цементу I типу. Подальше збільшення міцності до класу С60/75 уже потребує підвищення витрат цементу до 457 кг/м<sup>3</sup> та зниження частки шлаку у в'яжучому (цемент+шлак) від 42 до 16%, при поступовому підвищенні витрати суперпластифікатора. Як слід було очікувати, основний чинником, що забезпечує підвищення міцності в усьому діапазоні класів є зниження водо-в'яжучого відношення.

Таблиця 5  
Результати оптимізації складу самоущільнюваного бетону

Клас бетону	$f_{cm28}$ , МПа	Ц, кг/м <sup>3</sup>	Ш, кг/м <sup>3</sup>	Вміст шлаку у в'яжучому*, %	СП, %	В, л/м <sup>3</sup>	В/Ц	В/Вяж*	П, кг/м <sup>3</sup>	Щ, кг/м <sup>3</sup>
С 12/15	19,3	180	102	36	0,00	185	0,96	0,66	959	918
С 16/20	25,7	180	121	40	0,05	177	0,94	0,59	963	918
С 20/25	32,1	180	123	40	0,18	153	0,85	0,51	1024	918
С 25/30	38,6	180	125	41	0,34	130	0,76	0,43	1083	918
С 30/35	45,0	180	129	42	0,59	112	0,68	0,36	1127	918
С 32/40	51,4	205	127	38	0,74	108	0,6	0,33	1119	918
С 35/45	57,8	240	121	34	0,76	106	0,52	0,29	1099	918
С 40/50	64,3	278	115	29	0,78	105	0,44	0,27	1075	918
С 45/55	70,7	316	110	26	0,81	105	0,38	0,25	1047	918
С 50/60	77,1	357	104	23	0,84	106	0,32	0,23	1015	918
С 55/67	86,1	419	95	18	0,89	111	0,26	0,22	957	918
С 60/75	96,4	457	84	16	0,96	122	0,23	0,23	905	918

\* - за кількість в'яжучого у даному випадку прийнято сумарну витрату цементу та доменного гранульованого шлаку

**Висновки та рекомендації.** Отримано комплекс експериментально-статистичних моделей властивостей самоущільнювальних бетонних сумішей і бетонів на їх основі (СУБ) з врахуванням впливу витрат портландцементу і добавок полікарбоксилатного суперпластифікатора та меленого доменного гранульованого шлаку.

Виконано аналіз впливу дослідженіх факторів на водопотребу, втрату рухомості в часі, водоцементне відношення, міцність на стиск у віці 1, 7 та 28 діб, а також витрати цементу на одиницю міцності.

Реалізовано метод математичної оптимізації складів самоущільнювального бетону за допомогою комплексу отриманих експериментально-статистичних моделей з метою забезпечення необхідних властивостей при мінімальній сумарній вартості компонентів.

1. The European Guidelines for Self-Compacting Concrete: Specification, Production and Use. СУБ European Project Group, May 2005. 63 pp.
2. EN 206-1:2000 Concrete. Specification performance production and conformity.
3. Okamura H. Ozawa K. Mix Design for Self-Compacting Concrete. Concrete Library of JSCE. 1995. No. 25. P. 107–120.
4. Okamura H. Ouchi M. Self-compacting high performance concrete. Concrete International. 1997. Vol. 19, No 7. P. 50–54.
5. Несветаев Г. В. Некоторые вопросы применения добавок для бетонов. Бетон и железобетон. 2011. № 2. С. 78–80.  
Nesvetayev G. V. Nekotoryye voprosy primeneniya dobavok dlya betonov. Beton i zhelezobeton. 2011. № 2. S. 78–80.
6. Su N., Hsu K-C., Chai H-W. A simple mix design method for self-compacting concrete. Cem. Concr. Res. Vol. 31. 2001. P. 1799–1807.
7. Комаринский М. В., Смирнов С. И., Бурцева Д. Е. Литые и самоуплотняющиеся бетонные смеси. Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. Вып. 11(38). С. 106–118.  
Komarinskiy M. V., Smirnov S. I., Burtseva D. Ye. Lityye i samouplotnyayushchiyesya betonnyye smesi. Stroitel'stvo unikal'nykh zdaniy i sooruzheniy. 2015. Vyp. 11(38). S. 106–118.
8. Базанов С. М., Торопова М. В. Самоуплотняющийся бетон – эффективный инструмент в решении задач строительства. Ивановская госуд. академия строит-ва и арх-ры.  
Bazanov S. M., Toropova M. V. Samouplotnyayushchiysya beton – effektivnyy instrument v reshenii zadach stroitel'stva. Ivanovskaya gosud. akademiya stroit-va i arkh-ry. URL: <http://subscribe.ru/archive/home.build.penobeton/200703/13103620.html>. (дата звернення: 20.12.2020).
9. Montgomery, D. C. 2000. Design and analysis of experiments, 5th ed. New Jersey: Wiley, 688 p.
10. Box, G.E.P., J. S. Hunter, and W. G. Hunter. 2005. Statistics for experimenters: design, discovery, and innovation. 2nd ed. Wiley: New Jersey, 672 p.
11. L. Dvorkin, O. Dvorkin, Y. Ribakov, Mathematical experiments planning in concrete technology, Nova Science Publishers, 2012, 175.
12. Lyse, I. (1932). Tests on consistency and strength of concrete having constant water content. Proceed, of the ASTM, 32, Part ii, pp 629-636.
13. T. C. Hansen, S. E. Hedegaard. Modified rule of constant water content for constant consistency of fresh fly ash concrete mixes. Materials and Structures, 1992, Volume 25, Number 6, Page 347.