

**ДО РОЗРАХУНКУ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ПЛИТ МЕТОДОМ
СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ**

**FOR THE CALCULATION OF REINFORCED CONCRETE SLABS BY
THE FINITE ELEMENT METHOD**

Азізов Т.Н., д.т.н., проф., Orcid [0000-0001-9621-9805] (Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини); **Перейрас Роландо,** Orcid [0000-0001-7845-3382], (Одеська державна академія будівництва та архітектури)

Taliat Azizov, Doctor of Engineering, Professor, (Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University, Ukraine); **Pereiras Rolando**(Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Ukraine)

Показано, що крутні моменти в плитах з застосуванням плоских скінчених елементів можуть суттєво відрізнитись від реальних крутних моментів. Це в свою чергу призводить до помилок в визначенні головних моментів і далі помилок в визначенні моменту тріщиноутворення та прогинів. Показано, що різниця між реальними крутними моментами і розрахунковими з застосуванням плоских скінчених елементів залежить від схеми навантаження, обпирання і співвідношення розмірів плити.

When modeling the work of reinforced concrete slabs with flat finite elements, one must be careful in schemes with uneven loads, as well as in schemes with holes. Torques in plates with flat finite elements can differ significantly from real torques. This, in turn, leads to errors in determining the main moments, as well as errors in determining the moment of crack formation. Errors in determining the moment of crack formation lead to errors in determining the deflections of reinforced concrete slabs. The difference between real and calculated deflections using flat finite elements can be different. This difference depends on the load scheme, the support scheme, as well as on the ratio of the dimensions of the slab. With pure torsion, the difference is two times. This is due to the fact that shear stresses, that act in the vertical direction, are not taken into account.

As an example, a diagram of a plate is considered, which is hinged at the ends and a distributed load acts on the right edge. A scheme is considered in which a monolithic slab rests on columns in the corners. The load schemes on one face and in the form of a load on half the area of the slab are considered. It is shown that the greater the ratio of the plate width to its length, the

greater the error between the real moment and the moment, which is determined by flat finite element modeling. With a small a/l ratio, the torque ratio approaches two, that is, it approaches the difference in pure torsion. As the a/l ratio increases, the torque ratio also increases. An explanation of this factor is shown as a result of the analysis of shear stresses in the finite element. To do this, shear stresses from bending should be added to the stress from pure torsion.

It is concluded that the error in determining torques when modeling with flat finite elements must be taken into account when designing. To prevent errors, it is recommended to use a rod approximation or volumetric finite elements

Ключові слова: плита, метод скінчених елементів, крутний момент, тріщина, дотичні напруження.

plate, finite element method, torque, crack, shear stresses

Аналіз досліджень і постановка задачі. При розрахунках перекриттів та інших плоских систем зазвичай використовують програмні комплекси типу LIRA-SAPR, SKAD та ін. При цьому зазвичай для моделювання роботи плити використовують плоскі скінчені елементи тонкої плити або тонкої оболонки [7-11]. Практика проектування показує, що існують такі розрахункові схеми навантаження і обпирання, за яких застосування плоских скінчених елементів призводить до помилок в визначенні внутрішніх зусиль [3, 5].

В [3] показано, що це пов'язано з фактом не врахування крутних моментів від дотичних напружень, діючих в вертикальному напрямку по товщині плити. В якості приклада наведено схему консольної плити, яка навантажена крайовим навантаженням. Однак не показані інші схеми навантаження і обпирання, де таке моделювання призводить до помилок. Розрахунки показують, що для різних схем обпирання і навантаження різниця між реальними і розрахунковими крутними моментами може бути різною. Крім того, не дано рекомендацій, як розраховувати в таких випадках перекриття.

В зв'язку зі сказаним метою даної статті є дослідження різних схем обпирання і навантаження плит, розроблення пропозицій для моделювання розрахункових схем перекриттів у випадках, коли застосування плоских скінчених елементів призводить до помилок.

Викладення основного матеріалу.

Відомо, що в кутових зонах плит з'являються діагональні тріщини [2]. Це пов'язано з дією головних моментів, які визначаються за формулою:

$$M_1, M_2 = \frac{1}{2} \left[M_x + M_y \pm \sqrt{(M_x - M_y)^2 + 4 \cdot M_{xy}^2} \right], \quad (1)$$

де M_x , M_y – згинальні моменти відповідно по осях X та Y ; M_{xy} – крутний момент. На ділянках, близьких до опор, згинальні моменти дуже малі, а крутні моменти мають максимальні значення. Тому головні моменти на цих

ділянках цілком залежать саме від величини крутних моментів M_{xy} . В результаті дії цих крутних моментів і з'являються похилі тріщини, в тому числі на верхній грані плити. В зв'язку с тим слід правильно визначати крутні моменти.

На рис. 1 показаний поперечний переріз плоского скінченого елемента плити. Відомо, що при крученні тонкої полоси [12] в її поперечному перерізі діють як горизонтальні напруження 1, так і вертикальні напруження 2 (рис. 1., а).

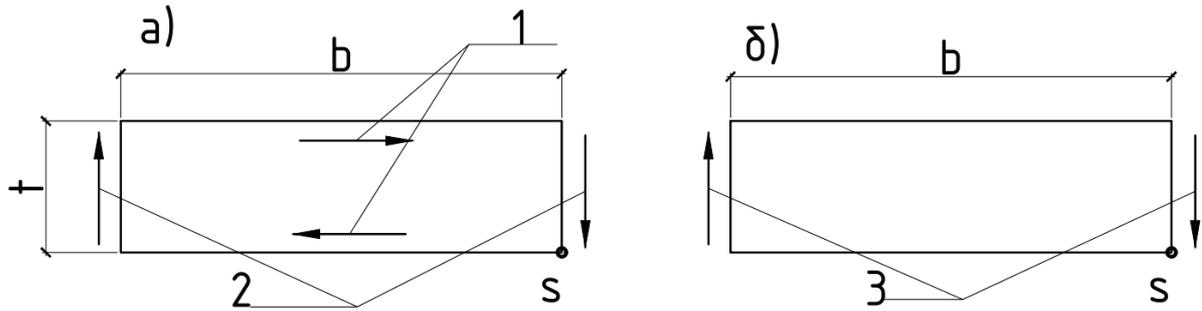


Рис. 1. Схема дії дотичних напружень по товщині елемента: 1, 2 – напруження від кручення; 3 – напруження від поперечної сили при згині

Відомо також, що в теорії плит дотичні напруження (на рис. 1, а – це напруження 2) в вертикальному напрямку (по товщині плити) не враховуються. Як показано в [3, 5] це призводить до того, що крутний момент при чистому крученні в два рази менший реального крутного моменту.

З теорії пружності відомо [6], що для плит дотичні напруження 1 на рис. 1,а (напруження τ_{xy}) визначаються як функція вертикальних переміщень w :

$$\tau_{xy} = \frac{E \cdot z}{1 + \mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} \quad (2)$$

де E , μ – відповідно модуль пружності і коефіцієнт Пуассона; z – вертикальна координата по товщині плити.

Крутний момент M_{xy} визначається за формулою [6]:

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \cdot z \cdot dz \quad (3)$$

З формул (2) та (3) легко бачити, що крутний момент за теорією плит складається від дії тільки дотичних напружень τ_{xy} , а це лише частина дотичних напружень при крученні тонкої полоси (тільки напружень 1 на рис. 1,а і не враховані напруження 2 на цьому рисунку).

Таким чином, при чистому крученні крутний момент, визначений за теорією плит, виявляється рівно в два рази меншим, ніж реальний крутний момент в стрижні з поперечним перерізом у вигляді тонкої полоси, що було

роз'яснено в [3]. Однак, при крученні зі згином крутний момент, визначений з застосуванням плоских скінчених елементів, може бути меншим ніж реальний крутний момент як менше ніж в два рази, так і більше.

Як приклад розглянемо схему плити, яка шарнірно оберта по торцях і на праву кромку діє розподілене навантаження (рис. 2). Таке навантаження розглядається при розрахунку збірних плит у складі збірного перекриття.

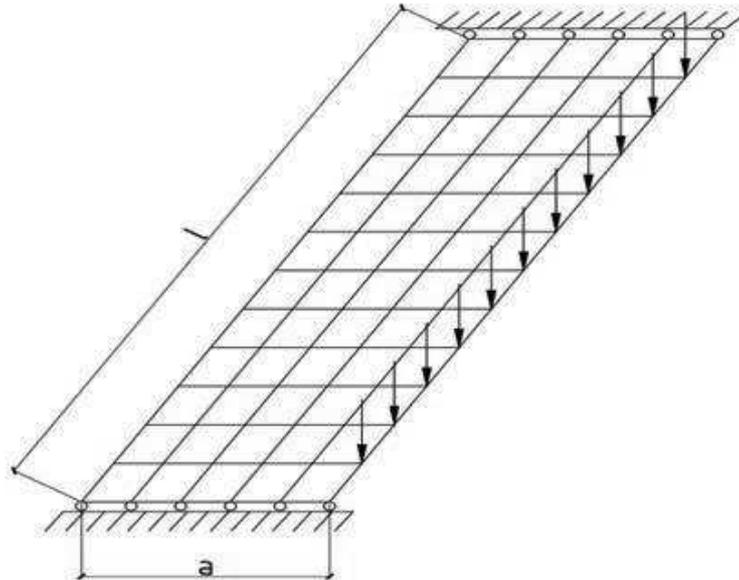


Рис. 2. Схема плити з крайовим навантаженням (схема 1)

При ширині плити a , її довжині l і рівномірному навантаженні q не важко вирахувати реальний крутний момент, діючий на опорі: $M_t = q \cdot l \cdot a / 4$. Змоделюємо в програмі LIRA-SAPR плиту за допомогою плоских скінчених елементів і визначимо крутний момент на опорі як сума крутних моментів M_{xy} в усіх скінчених елементах в торці плити. Позначимо цей момент M_{lira} і порівняємо його з теоретичним моментом M_t для різних відношень ширини a плити до її довжини l . В таблиці 1 наведено дані таких розрахунків для умовної схеми плити товщиною 200 мм і навантаженням $q=100$ Н/см.

Таблиця 1.

Порівняння крутних моментів для плити за рис. 2

Варіант №	a (мм)	l (мм)	Теоретичн. крутний момент M_t (кН·см)	Крутний момент M_{lira} (кН·см)	Відношення M_t/M_{lira}
1	600	6000	885	429	2.06
2	1000	6000	1475	692	2.13
3	1500	6000	2212	1000	2.21
4	3000	6000	4425	1765	2.51
5	6000	6000	8850	2635	3.36

Як можна бачити з таблиці 1, чим більше відношення a/l (відношення ширини плити до її довжини), тим більше похибка між теоретичним моментом та моментом, що визначається з моделювання плоскими скінченими елементами. При малому співвідношенні a/l відношення M_t/M_{lira} наближається до двох, тобто наближається до різниці при чистому крученні подібно [3]. При збільшенні співвідношення a/l відношення M_t/M_{lira} також збільшується.

Пояснення цього фактору можна зробити, аналізуючи дотичні напруження в скінченому елементі. Для цього к напруженням від чистого кручення (див. рис. 1, а) слід додати дотичні напруження від згину (див. рис. 1, б). На рис. 1,а показані напруження в елементі від дії крутного моменту; на рис. 1, б – дотичні напруження в тому ж самому елементі від згину. При цьому вважаємо, що елемент повертається за годинниковою стрілкою.

Розглянемо порівняння напружень при чистому крученні (див. рис. 1, а) та при крученні зі згином (рис. 1, а та рис. 1, б). Нехай при чистому крученні точка S на рис. 1 отримала певне переміщення W. При цьому як і в теорії плит, так і в програмах, де реалізований метод скінчених елементів, не будуть враховані дотичні напруження в вертикальному напрямку (напруження 2 на рис. 1). Якщо додати переміщення від згину, то для того, щоб переміщення w не змінилося, слід зменшити переміщення від кручення. А для цього треба зменшити дотичні напруження 1 на рис. 1. Таким чином при додаванні згину зменшується крутний момент M_{xy} , який в програмах LIRA-SAPR та інших створюється від дотичних напружень в горизонтальному напрямку (напружень 1 на рис. 1). А реальний крутний момент M_t – це сума дії дотичних напружень 1 та 2. З цієї причини при додаванні згину різниця M_t/M_{lira} збільшується (див. табл. 1).

Слід відмітити, що можуть бути схеми, де згин навпаки буде зменшувати співвідношення M_t/M_{lira} , якщо навантаження прикладене таким чином, що дотичні напруження 3 на рис. 1,б будуть діяти в зворотному напрямку.

Розглянемо тепер схему, яка найбільш розповсюджена в монолітних будівлях, де монолітна плита по кутах обпирається на колони. На рис. 3 показані схеми крайового навантаження (рис. 3, а) і навантаження половини площі плити (рис. 3, б). В таблицях 2 та 3 наведені дані з порівняння крутних моментів подібно таблиці 1.

Як можна бачити з цих таблиць, збільшення відношення a/l тут також призводить до збільшення співвідношення M_t/M_{lira} . Таким чином співвідношення M_t/M_{lira} залежить від відношення розмірів плити як при обпиранні по торцях, так і при обпиранні по кутах при крайовому та нерівномірному навантаженні. Якщо в схемах за рис. 3 навантаження прийняти рівномірним по всієї поверхні плити, то сумарні крутні моменти в торцях дорівнюватимуть нулю.

Зі сказаного слід зробити висновок, що похибку в визначенні крутних моментів при моделюванні плоскими скінченими елементами слід враховувати при проектуванні.

При проектуванні перекриттів на ділянках з нерівномірним навантаженням, на ділянках з отворами для уникнення похибок в визначенні крутних моментів, а отже і визначенні головних моментів і моменту тріщиноутворення, рекомендується застосовувати стрижневу апроксимацію, яка запропонована в роботах [1, 4] або застосовувати об'ємні скінчені елементи.

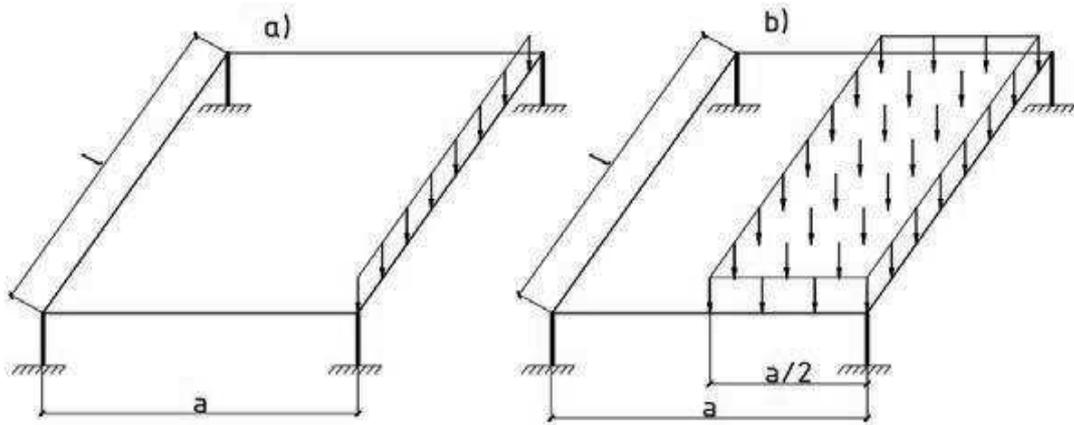


Рис. 3. Схема навантаження перекриття, обпертого по кутах

Таблиця 2.

Порівняння крутних моментів для плити за рис. 3, а

Варіант №	a (мм)	l (мм)	Теоретичн. крутний момент M_t (кН·см)	Крутний момент M_{lira} (кН·см)	Відношення M_t/M_{lira}
1	600	6000	885	429	2.06
2	3000	6000	4425	1775	2.49
3	6000	6000	8850	2667	3.32

Таблиця 3.

Порівняння крутних моментів для плити за рис. 3,б

Варіант №	a (мм)	l (мм)	Теоретичн. крутний момент M_t (кН·см)	Крутний момент M_{lira} (кН·см)	Відношення M_t/M_{lira}
2	3000	6000	3375	1309	2.58
3	6000	6000	13485	3821	3.53

Висновки і перспективи досліджень. При моделюванні роботи залізобетонних плит плоскими скінченими елементами слід обережно підходити в схемах з нерівномірним навантаженням, в схемах з отворами. Крутні моменти в плитах з застосуванням плоских скінчених елементів можуть суттєво

відрізнятись від реальних крутних моментів. Це в свою чергу призводить до помилок в визначенні головних моментів і далі помилок в визначенні моменту тріщиноутворення. Помилки в визначенні моменту тріщиноутворення призводять до помилок в визначенні прогинів залізобетонних плит. Цим можна пояснити, що часто реальні прогини залізобетонних плит виявляються більшими за розрахункові прогини. Різниця між реальними крутними моментами і розрахунковими з застосуванням плоских скінчених елементів може варіюватись в залежності від схеми навантаження, обпирання і співвідношення розмірів плити. Ця різниця при чистому крученні дорівнює 2, що пояснюється фактом не врахування дотичних напружень, діючих в вертикальному напрямку по товщині плити. Для запобігання помилок рекомендується в таких випадках застосовувати стрижневу апроксимацію або об'ємні скінчені елементи.

В подальшому планується експериментальна перевірка теоретичних положень.

1. Azizov T., Pereiras R. Consideration of Torsional Rigidity in the Calculation of Plates Using Beam Approximation// Science of Europe. – 2022. –Vol 1, #87 (2022). P. 58-61.

2. James K. Wight, James G. MacGregor. Reinforced Concrete. Mechanics and Design. USA, 2009. – 1157 p.

3. T. Azizov, D. Kochkarev. Limits of Using the Theory of Plates in the Calculation of Reinforced Concrete Slabs // Sciences of Europe. – 2023. –№ 111(2023). – P. 28-32.

4. Азизов Т.Н. Расчет железобетонных плит методом стержневой аппроксимации // Sciences of Europe. – 2019. – Vol 1, № 45. – С. 3-7.

Azyzov T.N. Raschet zhelezobetonnykh plyt metodom sterzhnevoi approksymatsyy // Sciences of Europe. – 2019. – Vol 1, № 45. – S. 3-7.

5. Азізов Т.Н, Кочкар'ов Д.В. До розрахунку залізобетонних перекриттів з врахуванням моделювання та тріщиноутворення. // Світ наукових досліджень. Вип. 19. Збірник наукових публікацій мультидисциплінарної наукової інтернет-конференції 23-24 травня 2023 р. ISSN 2786-6823. Тернопіль, Україна- Переворськ, Польща, 2023. - С. 223-229.

Azizov T.N, Kochkarov D.V. Do rozrakhunku zalizobetonnykh perekryttiv z vrakhuvanniam modeliuвання ta tryshchinoutvorennia. // Svit naukovykh doslidzhen. Vyp. 19. Zbirnyk naukovykh publikatsii multydystyplinarnoi naukovoї internet-konferentsii 23-24 travnia 2023 r. ISSN 2786-6823. Ternopil, Ukraina- Pervorsk, Polshcha, 2023. - S. 223-229.

6. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. 1968. – 512с.

Bezukhov N.Y. Osnovy teoryy uprugosty, plastychnosty y polzuchesty. 1968. – 512 s.

7. Верюжский Ю.В., Колчунов В.И., Барабаш М.С. Компьютерные технологии проектирования железобетонных конструкций. – К.: НАУ, 2006. – 808 с.

Veriuzhskiy Yu.V., Kolchunov V.Y., Barabash M.S. Kompiuternye tekhnolohyy proektyrovaniya zhelezobetonnykh konstruktsiy. – K.: NAU, 2006. – 808 s.

8. Городецкий А.С., Евзеров И.Д. Компьютерные модели конструкций. – К., 2007. – 394 с.

Horodetskiy A.S., Evzerov Y.D. Kompiuternye modely konstruktsiy. – K., 2007. – 394 s.

9. Еременко С.Ю. Методы конечных элементов в механике деформируемых тел. – Харьков: Основа, 1991. – 272 с.

Eremenko S.Yu. Metody konechnykh elementov v mekhanike deformyruemykh tel. – Kharkov: Osnova, 1991. – 272 s.

10. James K. Wight, James G. MacGregor. Reinforced Concrete. Mechanics and Design. USA, 2009. – 1157 p. 10. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 303 с.

11. Клованич С.Ф. Метод конечных элементов в нелинейных задачах инженерной механики. – Запорожье, 2009. – 395 с. 12. Тимошенко С.П. Теория упругости. Пер. с англ. Онти, 1934 – 451 с.

Klovanych S.F. Metod konechnykh elementov v nelyneinykh zadachakh ynzhenernoi mekhaniky. – Zaporozhe, 2009. – 395 s. 12. Tymoshenko S.P. Teoryia uprughosti. Per. s anhl. Onty, 1934 – 451 s.