

**НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ТОВСТИХ АНІЗОТРОПНИХ КОМПОЗИТНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК, ЗАХИЩЕНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНИМ МАТЕРІАЛОМ, ПІД ТЕРМОСИЛОВОЮ ДІЄЮ**

**STRESS-STRAIN STATE OF THICK ANISOTROPIC COMPOSITE CYLINDRICAL SHELLS PROTECTED BY FUNCTIONALLY-GRADED MATERIAL UNDER THERMAL ACTION**

**Трач В.М., д.т.н., проф.** (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне), **Подворний А.В., к.т.н., доц.** (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне), **Мерзлюк В.В., к.т.н., доц.** (Державне підприємство АНТОНОВ, м. Київ)

**Trach V.M., doctor of technical sciences, professor** (National university of water management and nature resources use, Rivne) ORCID ID: 0000-0001-9500-2743, **Podvorni A.V., candidate of technical sciences, associate professor** (National university of water management and nature resources use, Rivne) ORCID ID: 0000-0001-8518-4395, **Merzhluk V.V., candidate of technical sciences, associate professor** (Antonov company, Kyiv)

**В роботі, на основі тривимірних співвідношень теорії пружності, приведений підхід до встановлення напружено-деформованого стану товстих шаруватих анізотропних композитних циліндричних оболонок, що захищені функціонально-градієнтним матеріалом, і знаходяться в полі термосилової дії.**

**The paper presents an approach to determining the stress-strain state of thick anisotropic composite cylindrical shells, protected by a functionally graded material, and located in the field of thermal-force action. Based on the relations of the spatial theory of elasticity, a system of inhomogeneous differential equations in a three-dimensional formulation is obtained, which describes the stress state of thick anisotropic cylinders. To reduce the dimension of this system, the Bubnov-Galerkin method was used. The resulting one-dimensional system of twelve normal Cauchy equations is realized using the numerical method of discrete orthogonalization. As a representation of the capabilities of the proposed approach, the stress-strain states of two-, four-, and five-layer anisotropic cylindrical shells formed from fiber composites protected from temperature by a layer of transversely isotropic functional-gradient material are given.**

## **Ключові слова:**

Товста анізотропна циліндрична оболонка, напружено-деформований стан, тривимірний постановка, функціонально-градієнтний матеріал  
Thick anisotropic cylindrical shell, stress-strain state, three-dimensional formulation, functionally graded material

**Вступ.** Тонкостінні конструкції з композитних матеріалів широко використовуються в найрізноманітніших елементах сучасної техніки. Наприклад, авіаційна, ракетобудівна та будівельна галузі потребують використання оболонок з легких композиційних матеріалів з високою міцністю. На жаль, традиційні композитні матеріали не завжди здатні використовуватись в умовах високих температур, тому що їх несуча здатність, при цьому, може суттєво зменшуватися. Для захисту тонкостінних конструкцій з композитів від дії температури може використовуватися термостійка кераміка, однак, як відомо, цей матеріал має крихкі властивості й не сприймає розтяг, згин і кручення.

**Аналіз останніх досліджень.** Відносно недавно з'явився новий клас композитних матеріалів, відомий як функціонально-градієнтні матеріали (ФГМ) [1]. Типовий ФГМ є неоднорідним композитом виготовленим з різних фаз матеріальних складових (як правило, кераміки та металу). Керамічні складові ФГМ здатні протистояти високотемпературному середовищу завдяки кращим характеристикам термостійкості, а металеві складові забезпечують більш його високі механічні показники та зменшують можливість руйнування. Таким чином, використання ФГМ може сприяти захисту оболонкової конструкції від дії змінного температурного поля, що дозволить їй сприймати термосилові навантаження без зниження її, наприклад, міцності.

На теперішній час, проведений достатньо детальний аналіз напружено-деформованого стану тонких і нетонких циліндричних оболонок як зі звичайних композитів, так і з ФГМ в рамках розрахунків двовимірних підходів під дією термосилового навантаження [2, 3, 4, 5, 1, 6]. В цих роботах зміна характеристик напружено-деформованого стану за товщиною конструкції моделюється гіпотезами різного ступеня точності. Загально відомо, що для обчислення напружено-деформованого стану (НДС) товстих циліндричних оболонок слід застосовується підхід [7, 8, 9, 10, 11, 12], що спирається на використання рівнянь просторової теорії пружності та який дозволяє коректно проаналізувати зміну параметрів, наприклад, напружено-деформованого стану за товщиною конструкції.

Авторами пропонується підхід до встановлення НДС товстої шаруватої анізотропної циліндричної оболонки, що виготовлена з волокнистого композиту укладеного під кутом до твірної та шару з ФГМ. Відомо, що при цьому необхідно враховувати ефект анізотропії, викликаний розбіжністю між напрямками армування та осями оболонки (рис. 1) [2, 7, 3, 8, 9, 10, 11, 12, 13]

зі спробою оцінки впливу температури на таку комбіновану за товщиною конструкцію.

У цій роботі для розв'язку задачі про НДС товстої анізотропної циліндричної оболонки з волокнистих композитів використовується, як було сказано вище, тривимірна теорія пружності [14]. Отримані при її використанні розв'язки, сподіваємось, можуть послужити як еталонні в розрахунках НДС тонкостінних конструкцій більш складної геометрії, що можуть бути встановлені, наприклад, при використанні методу скінчених елементів.

**Постановка мети і задач досліджень.** Лінійні рівняння рівноваги, в разі невісесиметричного напруженого стану, для кожного  $i$ -го шару запишемо у вигляді [14]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left[ \sigma_{rr}^i + r \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{rz}^i) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta r}^i) - \sigma_{\theta\theta}^i + r F_r^i \right]; \\ \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left[ \tau_{rz}^i + r \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{zz}^i) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta z}^i) + r F_z^i \right]; \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}^i}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left[ \tau_{r\theta}^i + \tau_{\theta r}^i + r \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{z\theta}^i) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\sigma_{\theta\theta}^i) + r F_{\theta}^i \right], \end{aligned} \quad (1)$$

де  $r_i (i=1,2)$  – радіус циліндра (рис. 1), який не залежить від координат  $z$  та  $\theta$ ;  $\sigma_{zz}^i, \sigma_{rr}^i, \sigma_{\theta\theta}^i, \tau_{rz}^i, \tau_{r\theta}^i, \tau_{z\theta}^i$  – компоненти тензора напружень,  $F_r, F_z, F_{\theta}$  – проекції вектора питомих об'ємних сил на напрямки дотичних до координатних ліній  $r, z, \theta$ .

Зв'язок між складовими деформацій та переміщеннями прийемо у вигляді:

$$\begin{aligned} e_{zz}^i &= \frac{\partial u_z^i}{\partial z}; & e_{\theta\theta}^i &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}^i}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r^i; & e_{rr}^i &= \frac{\partial u_r^i}{\partial r}; \\ e_{z\theta}^i &= \frac{\partial u_{\theta}^i}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial \theta}; & e_{rz}^i &= \frac{\partial u_r^i}{\partial z} + \frac{\partial u_z^i}{\partial r}; & e_{r\theta}^i &= \frac{\partial u_{\theta}^i}{\partial r} - \frac{1}{r} u_{\theta}^i + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут  $u_z^i, u_{\theta}^i, u_r^i$  – переміщення в напрямку осей  $z, \theta, r$  відповідно;  $e_{zz}^i, e_{\theta\theta}^i, e_{rr}^i$  – відносні лінійні деформації за напрямками координатних осей  $z, \theta, r$ ;  $e_{z\theta}^i, e_{rz}^i, e_{r\theta}^i$  – відносні зсуви за дотичними в розглядуваній точці до відповідних координатних поверхонь.

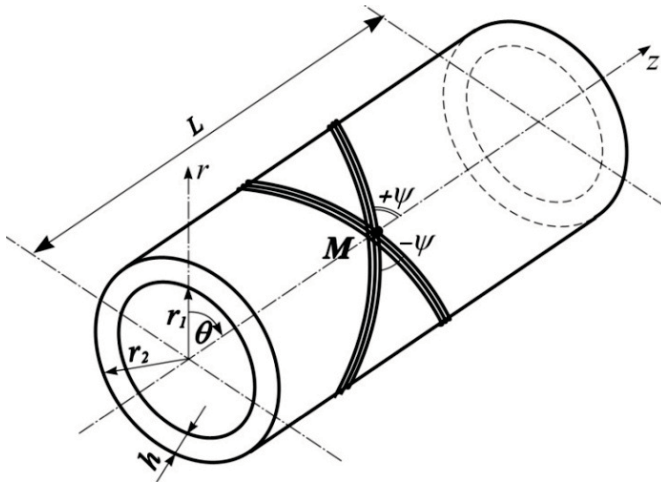


Рис. 1. Циліндрична товстостінна анізотропна оболонка.

Співвідношення узагальненого закону Гука, що зв'язують компоненти деформацій і напружень в разі збігу осей ортотропії з координатними такі:

$$\begin{aligned}
 e_{zz}^i &= a_{11}^{i/} \sigma_{zz}^i + a_{12}^{i/} \sigma_{\theta\theta}^i + a_{13}^{i/} \sigma_{rr}^i; \\
 e_{\theta\theta}^i &= a_{12}^{i/} \sigma_{zz}^i + a_{22}^{i/} \sigma_{\theta\theta}^i + a_{23}^{i/} \sigma_{rr}^i; \\
 e_{rr}^i &= a_{13}^{i/} \sigma_{zz}^i + a_{23}^{i/} \sigma_{\theta\theta}^i + a_{33}^{i/} \sigma_{rr}^i; \\
 e_{r\theta}^i &= a_{44}^{i/} \tau_{r\theta}^i; \quad e_{rz}^i = a_{55}^{i/} \tau_{rz}^i; \quad e_{z\theta}^i = a_{66}^{i/} \tau_{z\theta}^i.
 \end{aligned} \quad (3)$$

При повороті осей ортотропії відносно осі  $z$  ці залежності набирають вигляду:

$$\begin{aligned}
 e_{zz}^i &= a_{11}^i \sigma_{zz}^i + a_{12}^i \sigma_{\theta\theta}^i + a_{13}^i \sigma_{rr}^i + a_{16}^i \tau_{z\theta}^i; \\
 e_{\theta\theta}^i &= a_{12}^i \sigma_{zz}^i + a_{22}^i \sigma_{\theta\theta}^i + a_{23}^i \sigma_{rr}^i + a_{26}^i \tau_{z\theta}^i; \\
 e_{rr}^i &= a_{13}^i \sigma_{zz}^i + a_{23}^i \sigma_{\theta\theta}^i + a_{33}^i \sigma_{rr}^i + a_{36}^i \tau_{z\theta}^i; \\
 e_{r\theta}^i &= a_{44}^i \tau_{r\theta}^i + a_{45}^i \tau_{rz}^i; \quad e_{rz}^i = a_{45}^i \tau_{r\theta}^i + a_{55}^i \tau_{rz}^i; \\
 e_{z\theta}^i &= a_{16}^i \sigma_{zz}^i + a_{26}^i \sigma_{\theta\theta}^i + a_{36}^i \sigma_{rr}^i + a_{66}^i \tau_{z\theta}^i.
 \end{aligned} \quad (4)$$

В (3, 4)  $a_{kl}^{i/}$  та  $a_{kl}^i$  – механічні константи  $i$ -го шару, відповідно, ортотропного та матеріалу з однією площиною пружної симетрії, зв'язок між якими встановлено у [15].

**Методика досліджень.** Співвідношення узагальненого закону Гука, для матеріалу з однією площиною пружної симетрії (4), приведемо до виду [7], який використаємо при розв'язку системи (1):

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz}^i &= b_{11}^i e_{zz}^i + b_{12}^i e_{\theta\theta}^i + b_{16}^i e_{z\theta}^i + c_1^i \sigma_{rr}^i + \beta_{11}^i T; \\
\sigma_{\theta\theta}^i &= b_{12}^i e_{zz}^i + b_{22}^i e_{\theta\theta}^i + b_{26}^i e_{z\theta}^i + c_2^i \sigma_{rr}^i + \beta_{22}^i T; \\
\tau_{z\theta}^i &= b_{16}^i e_{zz}^i + b_{26}^i e_{\theta\theta}^i + b_{66}^i e_{z\theta}^i + c_3^i \sigma_{rr}^i + \beta_{12}^i T; \\
e_{rr}^i &= -c_1^i e_{zz}^i - c_2^i e_{\theta\theta}^i - c_3^i e_{z\theta}^i + c_4^i \sigma_{rr}^i + \alpha_{33}^i T + \\
&+ a_{13}^i \beta_{11}^i T + a_{23}^i \beta_{22}^i T + a_{36}^i \beta_{12}^i T; \\
e_{rz}^i &= a_{45}^i \tau_{r\theta}^i + a_{55}^i \tau_{rz}^i + \alpha_{13}^i T; \\
e_{r\theta}^i &= a_{44}^i \tau_{r\theta}^i + a_{45}^i \tau_{rz}^i + \alpha_{23}^i T, \tag{5}
\end{aligned}$$

де  $b_{kl}^i$  ( $k, l = 1, 2, 6$ ),  $c_k^i$  ( $k = 1 \div 4$ ) – характеристики  $i$ -го шару, що визначаються за допомогою механічних констант  $a_{kl}^i$  матеріалу оболонки,  $\beta_{11}^i$ ,  $\beta_{22}^i$ ,  $\beta_{12}^i$  – компоненти напруженого стану  $i$ -го шару, що пов'язані з температурою  $T$  ( $^{\circ}\text{K}$ ) залежностями:

$$\begin{aligned}
\beta_{11}^i T &= -(b_{11}^i \alpha_{11}^i + b_{12}^i \alpha_{22}^i + b_{16}^i \alpha_{12}^i) T; \\
\beta_{22}^i T &= -(b_{12}^i \alpha_{11}^i + b_{22}^i \alpha_{22}^i + b_{26}^i \alpha_{12}^i) T; \\
\beta_{12}^i T &= -(b_{16}^i \alpha_{11}^i + b_{26}^i \alpha_{22}^i + b_{66}^i \alpha_{12}^i) T,
\end{aligned}$$

тут та в (5)  $\alpha_{kl}^i$  ( $k, l = 1 \div 3$ ) – коефіцієнти лінійного температурного розширення матеріалу  $i$ -го шару оболонки.

Замінюючи в (5) деформації  $e_{zz}^i$ ,  $e_{\theta\theta}^i$ ,  $e_{z\theta}^i$  їх виразами з (2) і підставляючи отримані залежності для  $\sigma_{zz}^i$ ,  $\sigma_{\theta\theta}^i$ ,  $\tau_{z\theta}^i$  в (1), а для  $e_{rz}^i$ ,  $e_{r\theta}^i$ ,  $e_{rr}^i$  в (2) отримаємо для кожного  $i$ -го шару повну систему диференціальних рівнянь в частинних похідних в якій враховано те, що оболонка деформується з урахуванням осової симетрії:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial r} &= \frac{c_2^i - 1}{r} \sigma_{rr}^i - \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial z} + \frac{b_{22}^i}{r^2} u_r + \frac{b_{12}^i}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial z} + \frac{b_{26}^i}{r} \frac{\partial u_{\theta}^i}{\partial z} - \frac{b_{12}^i}{r} \alpha_{11}^i T - \\
&- \frac{b_{22}^i}{r} \alpha_{22}^i T - \frac{b_{26}^i}{r} \alpha_{12}^i T;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial r} &= -c_1^i \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial z} - \frac{1}{r} \tau_{rz}^i - \frac{b_{12}^i}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial z} - b_{11}^i \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z^2} - b_{16}^i \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z^2} + \\
&+ b_{11}^i \alpha_{11}^i \frac{dT}{dz} + b_{12}^i \alpha_{22}^i \frac{dT}{dz} + b_{16}^i \alpha_{12}^i \frac{dT}{dz}; \\
\frac{\partial \tau_{r\theta}^i}{\partial r} &= -\frac{2}{r} \tau_{r\theta}^i - b_{66}^i \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z^2} - c_3^i \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial z} - \frac{b_{26}^i}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial z} - b_{16}^i \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z^2} + \\
&+ b_{16}^i \alpha_{11}^i \frac{dT}{dz} + b_{26}^i \alpha_{22}^i \frac{dT}{dz} + b_{66}^i \alpha_{12}^i \frac{dT}{dz}; \\
\frac{\partial u_r^i}{\partial r} &= c_4^i \sigma_{rr}^i - \frac{c_2^i}{r} u_r^i - c_1^i \frac{\partial u_z^i}{\partial z} - c_3^i \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} + \alpha_{33}^i T - a_{13}^i b_{11}^i \alpha_{11}^i T - \\
&- a_{13}^i b_{12}^i \alpha_{22}^i T - a_{13}^i b_{16}^i \alpha_{12}^i T - a_{23}^i b_{12}^i \alpha_{11}^i T - a_{23}^i b_{22}^i \alpha_{22}^i T - \\
&- a_{23}^i b_{26}^i \alpha_{12}^i T - a_{36}^i b_{16}^i \alpha_{11}^i T - a_{36}^i b_{26}^i \alpha_{22}^i T - a_{36}^i b_{66}^i \alpha_{12}^i T; \\
\frac{\partial u_z^i}{\partial r} &= a_{55}^i \tau_{rz}^i + a_{45}^i \tau_{r\theta}^i - \frac{\partial u_r^i}{\partial z} + \alpha_{13}^i T; \\
\frac{\partial u_\theta^i}{\partial r} &= a_{45}^i \tau_{rz}^i + a_{44}^i \tau_{r\theta}^i + \frac{1}{r} u_\theta^i + \alpha_{23}^i T. \tag{6}
\end{aligned}$$

У випадку, якщо температурне поле є сталим на кожній поверхні циліндра, то система (6) переписеться:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial r} &= \frac{c_2^i - 1}{r} \sigma_{rr}^i - \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial z} + \frac{b_{22}^i}{r^2} u_r^i + \frac{b_{12}^i}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial z} + \frac{b_{26}^i}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} - \frac{b_{12}^i}{r} \alpha_{11}^i T - \\
&- \frac{b_{22}^i}{r} \alpha_{22}^i T - \frac{b_{26}^i}{r} \alpha_{12}^i T; \\
\frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial r} &= -c_1^i \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial z} - \frac{1}{r} \tau_{rz}^i - \frac{b_{12}^i}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial z} - b_{11}^i \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z^2} - b_{16}^i \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z^2}; \\
\frac{\partial \tau_{r\theta}^i}{\partial r} &= -\frac{2}{r} \tau_{r\theta}^i - b_{66}^i \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z^2} - c_3^i \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial z} - \frac{b_{26}^i}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial z} - b_{16}^i \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z^2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_r^i}{\partial r} &= c_4^i \sigma_{rr}^i - \frac{c_2^i}{r} u_r^i - c_1^i \frac{\partial u_z^i}{\partial z} - c_3^i \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} + \alpha_{33}^i T - a_{13}^i b_{11}^i \alpha_{11}^i T - \\
&- a_{13}^i b_{12}^i \alpha_{22}^i T - a_{13}^i b_{16}^i \alpha_{12}^i T - a_{23}^i b_{12}^i \alpha_{11}^i T - a_{23}^i b_{22}^i \alpha_{22}^i T - \\
&- a_{23}^i b_{26}^i \alpha_{12}^i T - a_{36}^i b_{16}^i \alpha_{11}^i T - a_{36}^i b_{26}^i \alpha_{22}^i T - a_{36}^i b_{66}^i \alpha_{12}^i T; \\
\frac{\partial u_z^i}{\partial r} &= a_{55}^i \tau_{rz}^i + a_{45}^i \tau_{r\theta}^i - \frac{\partial u_r^i}{\partial z} + \alpha_{13}^i T; \\
\frac{\partial u_\theta^i}{\partial r} &= a_{45}^i \tau_{rz}^i + a_{44}^i \tau_{r\theta}^i + \frac{1}{r} u_\theta^i + \alpha_{23}^i T. \tag{7}
\end{aligned}$$

Розв'язок системи (7) має відповідати умовам на бічних поверхнях при  $r = r_1, r = r_2$

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^1(r_1, z) &= \pm q_r^1(z); & \tau_{rz}^1(r_1, z) &= 0; & \tau_{r\theta}^1(r_1, z) &= 0; \\
\sigma_{rr}^2(r_2, z) &= \pm q_r^2(z); & \tau_{rz}^2(r_2, z) &= 0; & \tau_{r\theta}^2(r_2, z) &= 0, \tag{8}
\end{aligned}$$

умовам на торцях  $z = 0, z = L$

$$\sigma_{zz}^i = u_r^i = u_\theta^i = 0 \tag{9}$$

і умовам жорсткого контакту шарів:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^i(r_i) &= \sigma_{rr}^{i+1}(r_i); & \tau_{rz}^i(r_i) &= \tau_{rz}^{i+1}(r_i); & \tau_{r\theta}^i(r_i) &= \tau_{r\theta}^{i+1}(r_i); \\
u_r^i(r_i) &= u_r^{i+1}(r_i); & u_z^i(r_i) &= u_z^{i+1}(r_i); & u_\theta^i(r_i) &= u_\theta^{i+1}(r_i). \tag{10}
\end{aligned}$$

Умови (9) відповідають наявності на краях циліндра діафрагми абсолютно жорсткої в своїй площині і гнучкої з неї. В (8)  $q_r^1(z), q_r^2(z)$  – розподілений по бокових поверхнях оболонки внутрішній і зовнішній тиск відповідно.

Для розв'язку тривимірної задачі (7) та (8 – 9) скористаємося процедурою методу Бубнова-Гальоркіна. Згідно з нею, розкладемо всі функції в тригонометричні ряди за координатою вздовж твірної циліндра  $z$  так, що б вони задовольняли крайовим умовам (9):

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^i(r, z) &= \sum_{m=1}^{\infty} [y_{1,p}^i(r) + y_{1,m}^{i'}(r)] \sin l_m z; \\
\tau_{rz}^i(r, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} [y_{2,p}^i(r) + y_{2,m}^{i'}(r)] \cos l_m z; \\
\tau_{r\theta}^i(r, z) &= \sum_{m=1}^{\infty} [y_{3,p}^i(r) + y_{3,m}^{i'}(r)] \sin l_m z;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_r^i(r, z) &= \sum_{m=1}^{\infty} [y_{4,p}^i(r) + y_{4,m}^{i/}(r)] \sin l_m z; \\
u_z^i(r, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} [y_{5,p}^i(r) + y_{5,m}^{i/}(r)] \cos l_m z; \\
u_{\theta}^i(r, z) &= \sum_{m=1}^{\infty} [y_{6,p}^i(r) + y_{6,m}^{i/}(r)] \sin l_m z, \quad (11)
\end{aligned}$$

де  $y_{i,pk}, y_{i,mk}^{\prime}$  ( $i=1,6$ ) – компоненти розкладання в тригонометричні ряди Фур'є складових напружено-деформованого стану оболонки,  $p, m$  – хвильові числа в рядах.

Після деяких математичних перетворень і розділення змінних в рівняннях (7) за допомогою співвідношень (11), отримуємо для кожного  $i$ -го шару систему звичайних диференціальних рівнянь дванадцятого порядку в нормальній формі Коші

$$\frac{d\bar{y}^i}{dr} = T^i(r)\bar{y}^i + f^i, \quad T^i(r) = t_{n,l}^i(r); \quad (n, l = 1 \div 12), \quad (12)$$

де  $\bar{y}^i = \{y_{1,p}^i; y_{2,p}^i; y_{3,p}^i; y_{4,p}^i; y_{5,p}^i; y_{6,p}^i; y_{1,m}^{i/}; y_{2,m}^{i/}; y_{3,m}^{i/}; y_{4,m}^{i/}; y_{5,m}^{i/}; y_{6,m}^{i/}\}$  – розв'язуюча вектор-функція. Ненульові елементи якої записуються відповідно до [10, 12],  $t_{n,l}^i(r)$  – коефіцієнти при невідомих системи (7),  $f^i$  – компоненти напруженого стану, що пов'язані з температурою в системі (7) визначаються:

$$f_1^i = f_7^i = -\frac{b_{12}^i}{r} \alpha_{11}^i T - \frac{b_{22}^i}{r} \alpha_{22}^i T - \frac{b_{26}^i}{r} \alpha_{12}^i T;$$

$$f_2^i = f_3^i = f_8^i = f_9^i = 0;$$

$$\begin{aligned}
f_4^i = f_{10}^i &= \alpha_{33}^i T - a_{13}^i b_{11}^i \alpha_{11}^i T - a_{13}^i b_{12}^i \alpha_{22}^i T - a_{13}^i b_{16}^i \alpha_{12}^i T - \\
&- a_{23}^i b_{12}^i \alpha_{11}^i T - a_{23}^i b_{22}^i \alpha_{22}^i T - a_{23}^i b_{26}^i \alpha_{12}^i T - a_{36}^i b_{16}^i \alpha_{11}^i T - a_{36}^i b_{26}^i \alpha_{22}^i T - \\
&- a_{36}^i b_{66}^i \alpha_{12}^i T;
\end{aligned}$$

$$f_5^i = f_{11}^i = \alpha_{13}^i T;$$

$$f_6^i = f_{12}^i = \alpha_{23}^i T.$$

Реалізація отриманої одновимірної задачі про напружено-деформований стан товстого циліндра проводилась при використанні чисельного методу



дискретної ортогоналізації [3]. Після розв'язку системи (12) з граничними умовами (8), для переходу від отриманих функцій до компонентів напружено-деформованого стану використовувались співвідношення (11) та перші три залежності закону Гука (5).

**Результати чисельних розрахунків та їх аналіз.** Об'єктом дослідження було вибрано циліндричну оболонку виготовлену з шарів волокнистого матеріалу боропластик та шару функціонально-градієнтного матеріалу [1] під дією розподіленого зовнішнього тиску та температурного поля. В якості керамічної складової ФГМ вибрано нітрид силікону, а металевої – титан (Ti-6Al-4V). Розподіл температурного поля за товщиною циліндра визначався згідно [18]. Фізико-механічні властивості функціонально-градієнтної складової циліндра, в залежності від температури, визначались з табл.1–4 [4] згідно залежностей[16]:

$$\begin{aligned}
 E &= P_{0E} \cdot (P_{-1E} T^{-1} + 1 + P_{1E} T + P_{2E} T^2 + P_{3E} T^3); \\
 \nu &= P_{0\nu} \cdot (P_{-1\nu} T^{-1} + 1 + P_{1\nu} T + P_{2\nu} T^2 + P_{3\nu} T^3), \\
 \alpha &= P_{0a} \cdot (P_{-1a} T^{-1} + 1 + P_{1a} T + P_{2a} T^2 + P_{3a} T^3); \\
 \kappa &= P_{0\kappa} \cdot (P_{-1\kappa} T^{-1} + 1 + P_{1\kappa} T + P_{2\kappa} T^2 + P_{3\kappa} T^3), \quad (13)
 \end{aligned}$$

де  $E$  – шуканий модуль пружності,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона,  $\alpha$  – коефіцієнт лінійного температурного розширення та  $\kappa$  – теплопровідність, все для заданої температури  $T(^{\circ}\text{K})$ ,  $P_{0E}$ ,  $P_{0\nu}$ ,  $P_{0a}$ ,  $P_{0\kappa}$  – шукані характеристики матеріалу при  $T=0^{\circ}\text{K}$ ,  $P_{iE}$ ,  $P_{i\nu}$ ,  $P_{ia}$ ,  $P_{i\kappa}$  – беруться з таблиць 1–4.

Боропластик має такі механічні характеристики:  $E_{11}=28 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,  $E_{22}=E_{33}=3.1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,  $G_{12}=G_{23}=1.05 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,  $G_{13}=2.12 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,  $\nu_{21}=0.25$ ,  $\nu_{12}=0.0277$ .

Таблиця 1.

Модулі пружності кераміки та металу в Па

Матеріал	$P_{0E}$	$P_{-1E}$	$P_{1E}$	$P_{2E}$	$P_{3E}$
Нітрид силікону	$348.43 \cdot 10^9$	0	$-3.070 \cdot 10^{-4}$	$2.160 \cdot 10^{-7}$	$-8.946 \cdot 10^{-11}$
Титановий сплав (Ti-6Al-4V)	$122.56 \cdot 10^9$	0	$-4.586 \cdot 10^{-4}$	0	0

Таблиця 2.

Коефіцієнти Пуассона кераміки та металу

Матеріал	$P_{0\nu}$	$P_{-1\nu}$	$P_{1\nu}$	$P_{2\nu}$	$P_{3\nu}$
Нітрид силікону	0.24	0	0	0	0
Титановий	0.2884	0	$1.121 \cdot 10^{-4}$	0	0

сплав (Ti-6Al-4V)					
----------------------	--	--	--	--	--

Таблиця 3.

Коефіцієнти лінійного температурного розширення кераміки та металу в  $^{\circ}\text{K}^{-1}$ 

Матеріал	$P_{0a}$	$P_{-1a}$	$P_{1a}$	$P_{2a}$	$P_{3a}$
Нітрид силікону	$5.8723 \cdot 10^{-6}$	0	$9.095 \cdot 10^{-4}$	0	0
Титановий сплав (Ti-6Al-4V)	$7.5788 \cdot 10^{-6}$	0	$6.638 \cdot 10^{-4}$	$-3.147 \cdot 10^{-6}$	0

Таблиця 4.

Теплопровідність кераміки та металу в  $\text{Вт}/(\text{м}^{\circ}\text{K})$ 

Матеріал	$P_{0к}$	$P_{-1к}$	$P_{1к}$	$P_{2к}$	$P_{3к}$
Нітрид силікону	13.723	0	$-1.032 \cdot 10^{-3}$	$5.466 \cdot 10^{-7}$	$-7.876 \cdot 10^{-11}$
Титановий сплав (Ti-6Al-4V)	1.000	0	$1.704 \cdot 10^{-2}$	0	0

Спільні характеристики змінного за товщиною функціонально-градієнтного матеріалу визначались згідно [17]:

$$E(\xi) = (E_c - E_m) \left( \frac{\xi}{h} \right)^N + E_m;$$

$$\nu(\xi) = (\nu_c - \nu_m) \left( \frac{\xi}{h} \right)^N + \nu_m,$$

$$\alpha(\xi) = (\alpha_c - \alpha_m) \left( \frac{\xi}{h} \right)^N + \alpha_m;$$

$$\kappa(\xi) = (\kappa_c - \kappa_m) \left( \frac{\xi}{h} \right)^N + \kappa_m, \quad (14)$$

де  $E(\xi)$ ,  $\nu(\xi)$ ,  $\alpha(\xi)$ ,  $\kappa(\xi)$  – фізико-механічні характеристики спільного матеріалу за товщиною,  $E_m$ ,  $\nu_m$ ,  $\alpha_m$ ,  $\kappa_m$  – механічні характеристики металу (титановий сплав),  $E_c$ ,  $\nu_c$ ,  $\alpha_c$ ,  $\kappa_c$  – механічні характеристики кераміки (цирконій),  $h$  – товщина функціонально-градієнтної складової матеріалу оболонки,  $\xi$  – координата за товщиною  $\xi = r - r_1$ ,  $r$  – координата довільної точки в загальній системі координат оболонки, рис. 1,  $r_1$  – координата внутрішньої поверхні циліндра,  $N$  – об'ємний показник фракції змішуваних матеріалів[1].

Розраховувалась циліндрична оболонка з такими геометричними параметрами (див. рис.1):  $L=1.2\text{м}$ ,  $r_1=0.57\text{м}$ ,  $r_2=0.63\text{см}$ ,  $h=0.06\text{м}$ . Було проаналізовано три варіанти розрахунків циліндра від: лише силової дії та сумісної термосилової. Для якої температурне поле змінювалось лише за товщиною функціонально-градієнтного матеріалу.

У першому варіанті, виконання такої конструкції, прийнято, що циліндр складено з двох шарів: внутрішнього  $r_1=0.57\text{м}$ ,  $r_{11}=0.6\text{м}$  – з волокнистого боропластика укладеного з кутом  $\psi=70^\circ$  до осі  $z$  та зовнішнього  $r_{02}=0.6\text{м}$ ,  $r_2=0.63\text{м}$  – з функціонально-градієнтного матеріалу при  $N=1$  (титановий сплав  $\text{Ti-6Al-4V}$  ( $r_{02}$ ) – нітрид силікону ( $r_2$ )).

Другий тип оболонки виконано з трьох шарів:двох внутрішніх перехресно-укладених з кутами армування  $\psi=\pm 70^\circ$  до осі  $z$  з матеріалу боропластик  $r_1=0.57\text{м}$ ,  $r_{11}=0.585\text{м}$  ( $\psi=70^\circ$ ) та  $r_{21}=0.585\text{м}$ ,  $r_{22}=0.6\text{м}$  ( $\psi=-70^\circ$ ) і зовнішнього  $r_{02}=0.6\text{м}$ ,  $r_2=0.63\text{м}$  – з функціонально-градієнтного матеріалу при  $N=1$  (титановий сплав  $\text{Ti-6Al-4V}$  ( $r_{02}$ ) – нітрид силікону ( $r_2$ )).

Третій вид оболонки утворений з п'яти шарів: чотирьох внутрішніх перехресно-укладених з кутами армування  $\psi=\pm 70$  до осі  $z$  з того ж волокнистого композитного матеріалу  $r_1=0.57\text{м}$ ,  $r_{11}=0.5775\text{м}$  ( $\psi=70^\circ$ ) та  $r_{21}=0.5775\text{м}$ ,  $r_{22}=0.585\text{м}$  ( $\psi=-70^\circ$ ),  $r_{31}=0.585\text{м}$ ,  $r_{32}=0.5925\text{м}$  ( $\psi=70^\circ$ ) та  $r_{41}=0.5925\text{м}$ ,  $r_{42}=0.6\text{м}$  ( $\psi=-70^\circ$ ) і зовнішнього  $r_{02}=0.6\text{м}$ ,  $r_2=0.63\text{м}$  – з функціонально-градієнтного матеріалу при  $N=1$  (титановий сплав  $\text{Ti-6Al-4V}$  ( $r_{02}$ ) – нітрид силікону ( $r_2$ )).

Усі представлені варіанти оболонкових конструкцій знаходились під дією розподіленого по зовнішній поверхні тиску  $q=-q_0 \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right)$ , де  $q_0=100\text{МПа}$ .

У випадку термосилової дії, температура змінювалось лише за товщиною функціонально-градієнтної складової матеріалу від  $T=293^\circ\text{K}$  ( $20^\circ\text{C}$ ) при  $r_{02}=0.6\text{м}$  до  $T=373^\circ\text{K}$  ( $100^\circ\text{C}$ ) при  $r_2=0.63\text{м}$  для всіх трьох видів циліндричних оболонок.

В таблицях 5, 6, 7, 8 представлені результати розподілу приведених компонентів напружено-деформованого стану за товщиною, для трьох варіантів циліндра, в залежності лише від силової дії ( $\sigma_{rr}, \tau_{rz}, \tau_{r\theta}$ )/ $q_0$ ,  $u_r/(h \cdot 10^{-2})$  (над рисою дробу) та від сумісної силової та температурної дій ( $\sigma_{rr}^t, \tau_{rz}^t, \tau_{r\theta}^t$ )/ $q_0$ ,  $u_r^t/(h \cdot 10^{-2})$  (під рисою дробу). Розрахунки приведені для перерізу оболонки, що знаходиться посередині довжини твірної  $z=0.5L$  (рис.1).

Таблиця 5.

Напруження  $\sigma_{rr}$  в шаруватих оболонках

$r$ (м)	Двошарова	Тришарова	П'ятишарова
0.6300	<u>-1.000</u>	<u>-1.000</u>	<u>-1.000</u>
	-1.000	-1.000	-1.000
0.6150	<u>-0.959</u>	<u>-0.965</u>	<u>-0.965</u>
	-0.960	-1.015	-1.014
0.6000	<u>-0.939</u>	<u>-0.949</u>	<u>-0.949</u>
	-0.939	-1.006	-1.006
0.6000	<u>-0.939</u>	<u>-0.949</u>	<u>-0.949</u>
	-0.939	-1.006	-1.006
0.5925	<u>-0.716</u>	<u>-0.723</u>	<u>-0.723</u>
	-0.716	-0.767	-0.766
0.5850	<u>-0.485</u>	<u>-0.490</u>	<u>-0.490</u>
	-0.485	-0.519	-0.519
0.5775	<u>-0.247</u>	<u>-0.249</u>	<u>-0.249</u>
	-0.247	-0.264	-0.264
0.5700	<u>0.000</u>	<u>0.000</u>	<u>0.000</u>
	0.000	0.000	0.000

З аналізу результатів приведених в таблицях 5-8 видно, що напружено-деформований стан шаруватих оболонок з волокнистого композиту та ФГМ залежить від структури такої конструкції. Як витікає з табл.5, напруження  $\sigma_{rr}$  практично лишаються незмінними при збільшенні числа шарів композитного матеріалу лише від силової дії. Має місце зростання зазначених напружень до 7% у випадку сумісної дії температури та зовнішнього навантаження.

Таблиця 6.

Напруження  $\tau_{rz}$  в шаруватих оболонках

$r$ (м)	Двошарова	Тришарова	П'ятишарова
0.6300	<u>0.000</u>	<u>0.000</u>	<u>0.000</u>
	0.000	0.000	0.000
0.6150	<u>0.000</u>	<u>-0.005</u>	<u>-0.005</u>
	0.000	-0.005	-0.005
0.6000	<u>-0.027</u>	<u>-0.022</u>	<u>-0.022</u>
	-0.026	-0.023	-0.023
0.6000	<u>-0.027</u>	<u>-0.022</u>	<u>-0.022</u>
	-0.026	-0.023	-0.023
0.5925	<u>0.014</u>	<u>0.008</u>	<u>0.008</u>
	0.014	0.009	0.009
0.5850	<u>0.032</u>	<u>0.021</u>	<u>0.022</u>

	0.032	0.023	0.024
0.5775	<u>0.027</u>	<u>0.019</u>	<u>0.019</u>
	0.028	0.020	0.020
0.5700	<u>0.000</u>	<u>0.000</u>	<u>0.000</u>
	0.000	0.000	0.000

Таблиця 7.

Напруження  $\tau_{r\theta}$  в шаруватих оболонках

$r$ (м)	Двошарова	Тришарова	П'ятишарова
0.6300	<u>0.000</u>	<u>0.000</u>	<u>0.000</u>
	0.000	0.000	0.000
0.6150	<u>0.075</u>	<u>-0.002</u>	<u>-0.001</u>
	0.074	-0.002	-0.001
0.6000	<u>0.122</u>	<u>-0.003</u>	<u>-0.001</u>
	0.121	-0.003	0.001
0.6000	<u>0.122</u>	<u>-0.003</u>	<u>-0.001</u>
	0.121	-0.003	0.001
0.5925	<u>0.094</u>	<u>0.133</u>	<u>0.101</u>
	0.093	0.141	0.107
0.5850	<u>0.064</u>	<u>0.169</u>	<u>-0.001</u>
	0.064	0.179	-0.001
0.5775	<u>0.033</u>	<u>0.133</u>	<u>0.101</u>
	0.033	0.141	0.107
0.5700	<u>0.000</u>	<u>0.000</u>	<u>0.000</u>
	0.000	0.000	0.000

Таблиця 8.

Переміщення  $u_r$  в шаруватих оболонках

$r$ (м)	Двошарова	Тришарова	П'ятишарова
0.6300	<u>-0.997</u>	<u>-0.949</u>	<u>-0.949</u>
	-0.997	-1.037	-1.036
0.6150	<u>-0.993</u>	<u>-0.944</u>	<u>-0.944</u>
	-0.993	-1.007	-1.006
0.6000	<u>-0.985</u>	<u>-0.934</u>	<u>-0.934</u>
	-0.985	-0.991	-0.990
0.6000	<u>-0.985</u>	<u>-0.934</u>	<u>-0.934</u>
	-0.985	-0.991	-0.990

0.5925	$\frac{-0.984}{-0.984}$	$\frac{-0.932}{-0.988}$	$\frac{-0.932}{-0.988}$
0.5850	$\frac{-0.983}{-0.983}$	$\frac{-0.931}{-0.987}$	$\frac{-0.931}{-0.986}$
0.5775	$\frac{-0.983}{-0.983}$	$\frac{-0.931}{-0.987}$	$\frac{-0.930}{-0.986}$
0.5700	$\frac{-0.984}{-0.984}$	$\frac{-0.931}{-0.987}$	$\frac{-0.930}{-0.986}$

Дотичні напруження  $\tau_{rz}, \tau_{r\theta}$  табл. 6,7, виникають лише в анізотропному матеріалі. Однак, з них видно, що у для одного шару волокнистого композиту в трансверсально-ізотропному матеріалі виникають анізотропні складові напруженого стану  $\tau_{rz}, \tau_{r\theta}$ . А для три- та п'ятишарових оболонок цей ефект практично відсутній. При цьому, слід зауважити, що наявні дотичні напруження є значно меншими за нормальні  $\sigma_{rr}$ .

Відповідно до приведених в табл. 5-8 результатів видно, що змінне за товщиною температурне поле в межах функціонально-градієнтної складової матеріалу оболонки від  $T=293^0\text{K}$  ( $20^0\text{C}$ ) при  $r_{02}=0.6\text{м}$  до  $T=373^0\text{K}$  ( $100^0\text{C}$ ) при  $r_2$  впливає на напружено-деформований стан циліндрів. При цьому, у випадку перехресного укладання шарів волокнистого композита, нормальні напруження  $\sigma_{rr}$  та переміщення  $u_r$  (табл.8) зростають до 9% у співставленні лише з силовою дією. Для одного ж шару волокнистого композиту ці компоненти напружено-деформованого стану лишаються практично незмінними. На наш погляд, це можна пояснити перерозподілом напружень всередині шару функціонально-градієнтного матеріалу.

**Висновки.** В роботі на основі тривимірних співвідношень теорії пружності приведений чисельний розрахунок напружено-деформованого стану шаруватих циліндричних анізотропних композитних оболонок, що виготовлені з анізотропного волокнистого композиту та функціонально-градієнтного матеріалу під силовою та термосиловою дією. Проаналізовано варіанти збільшення кількості шарів композиту, укладених так, що його власні осі ортотропії не співпадають з осями криволінійної системи координат циліндра, утворюючи матеріал з однією площиною пружної симетрії. Враховано, що фізико-механічні властивості функціонально-градієнтного матеріалу змінюються залежно від температури. Показано, що в шарі трансверсально-ізотропного ФГМ, у випадку двохшарової оболонки, виникають анізотропні складові напруженого стану. Також від дії температури напруження  $\sigma_{rr}$  в частині оболонки, що виготовлена з матеріалу з однією площиною пружної симетрії, збільшуються до 7%, а інші є незначними. Прогини у частині циліндра, що виготовлений з функціонально-

градієнтного матеріалу, зростають до 9%. Як видно з представлених результатів, напружено-деформований стан анізотропної композитної частини циліндричної оболонки від дії температури практично не змінюється тому, що вона захищена функціонально-градієнтним матеріалом.

1. Shen, Hui-Shen Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells. – CRC Press Taylor & Francis Group, Boca Raton London New York, 2009, – 266p.
2. Баженов В.А., Семенюк М.П., Трач В.М. Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок: Монографія. – К.: Каравела. – 2010. – 352с.  
Bazhenov V.A., Semeniuk M.P., Trach V.M. Nelineine deformuvannia, stiikest i zakrytychna povedinka anizotropnykh obolonok: Monohrafiia. – K.: Karavela. – 2010. – 352s.
3. Григоренко Я.М., Крюков Н.Н. Численные решения задач статики гибких слоистых оболочек с переменными параметрами. – К.: Наук. думка, 1988, – 264с.  
Hryhorenko Ya.M., Kriukov N.N. Chysslennyye resheniya zadach statyky hybkykh sloystykh obolochek s peremennymy parametramy. – K.: Nauk. dumka, 1988, – 264s.
4. Reddy J.N. and Chin C.D. Thermoelastical analysis of functionally graded cylinders and plates – Journal of Thermal Stresses, 21 – p. 593–626.
5. Shahsiah R. and Eslami M.R. Thermal buckling of functionally graded cylindrical shell – Journal of Thermal Stresses – 26 – 2003 – p. 277–294.
6. Shen, Hui-Shen Postbuckling of axially-loaded FGM hybrid cylindrical shells in thermal environments – Composites Science and Technology – 65 – 2005 – p. 1675–1690.
7. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Задачи теории упругости неоднородных тел – К.: Наук. думка, 1991. – 216с.  
Hryhorenko Ya.M., Vasylenko A.T., Pankratova N.D. Zadachy teoryy upru hosty neodnorodnykh tel – K.: Nauk. dumka, 1991. – 216s.
8. Трач В.М., Семенюк М.П., Подворний А.В. Використання 3D методики до розрахунку напруженого стану шаруватих анізотропних циліндричних оболонок під дією бокового тиску. Ресурсоєкономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: Збірник наукових праць. Випуск 37. – НУВГП.- Рівне – 2019. – с. 296-306.  
Trach V.M., Semeniuk M.P., Podvornyi A.V. Vykorystannia 3D metodyky do rozrakhunku napruzhenoho stanu sharuvatykh anizotropnykh tsylindrychnykh obolonok pid dieiu bokovoho tysku. Resursoekonomni materialy, konstruktsii, budivli ta sporudy: Zbirnyk naukovykh prats. Vypusk 37. – NUVHP.- Rivne – 2019. – s. 296-306.
9. Podvornyi A. The stability of anisotropic cylindrical shells under torsion in spatial position. – Acta Sci. Pol. Arch. – 19 (1) 2020 – p. 103-109.
10. Podvornyi A.V., Semenyuk N.P., Trach V.M. Stability of inhomogeneous cylindrical shells under distributed external pressure in a three-dimensional statement // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, N 6. p. 623 – 638.
11. Semenyuk N.P., Trach V.M., Podvornyi A.V. Spatial stability of layered anisotropic cylindrical shells under compressive loads. – International Applied Mechanics. – №2, – 2019.
12. Трач В.М., Подворний А.В., Хоружий М. М. Деформування та стійкість нетонких анізотропних оболонок: Монографія. – К.: Каравела, 2019. – 273 с.  
Trach V.M., Podvornyi A.V., Khoruzhyi M. M. Deformuvannia ta stiikest netonkykh anizotropnykh obolonok: Monohrafiia. – K.: Karavela, 2019. – 273 s.
13. Semenyuk N.P., Trach V.M., Podvornyi A.V. Stability of cylindrical anisotropic shells under axial pressure in three-dimensional statement. – Strength of Materials and Theory of Structures – issue 94 – KNUBA (2015) – p. 192–206.
14. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. – Л.–М.:ОГИЗ–1948.– 211с.

Novozhylov V.V. Основы нелинейной теории упругости. – Л.–М.: ОНУЗ – 1948. – 211с.

**15.** Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Наука– 1977. – 415с.

Lekhnytskyi S.H. Teoriya uprugosti anizotropnoho tela. – 2-e yzd., yspr. y dop. – М.: Nauka– 1977. – 415с.

**16.** Touloukian Y.S. Thermophysical Properties of High Temperature Solid Materials. – Mc Millan –New York – 1967– 1056p.

**17.** Gibson L.J., Ashby M.F., Karam G.N., Wegst U., and Shercliff H.R. Mechanical properties of natural materials. II. Microstructures for mechanical efficiency – Proceedings of the Royal Society of London Series A – 450 – p. 141–162.

**18.** Javaheri R. And Eslami M.R. Thermal buckling of functionally graded plates.–AIAA Journal – 40 – 2002 – p. 162–169.