УДК 624.074.04

ДО ВСТАНОВЛЕННЯ НАДІЙНИХ ВЕЛИЧИН КРИТИЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК, ПІДСИЛЕНИХ КОМПОЗИТОМ

TOWARDS THE ESTABLISHMENT OF RELIABLE VALUES OF CRITICAL LOADS OF REINFORCED CONCRETE CYLINDRICAL SHELLS REINFORCED WITH COMPOSITE

Трач В.М. д.т.н., професор, ORCID ID: 0000-0001-9500-2743, **Подворний А.В., д.т.н., доцент,** ORCID ID: 0000-0001-8518-4395, (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

Trach V.M. doctor of technical sciences, professor, ORCID ID: 0000-0001-9500-2743, **Podvornyi A.V. doctor of technical sciences, associate professor,** ORCID ID: 0000-0001-8518-4395 (National university of water management and nature resources use, Rivne)

В роботі, в рамках лінійної просторової теорії пружності та при використанні модифікованого варіаційного принципу Ху – Васідзу, представлено підхід до побудови системи однорідних диференціальних рівнянь стійкості в частинних похідних. За її використанням проведені дослідження стійкості циліндричної залізобетонної оболонки, а також такої оболонки, що підкріплена волокнистим композитом.

In the work, after modification by the authors of the variational principle of Hu – Wasidzu, an approach to constructing a system of homogeneous differential equations of stability in partial derivatives of the spatial linear theory of elasticity of an anisotropic body in a cylindrical coordinate system is presented. Based on the use of the Bubnov – Galerkin method, an approach to reducing a three-dimensional system of differential equations of stability to a one-dimensional one is presented. In accordance with it, the stress and displacement functions are expanded in double trigonometric Fourier series along the generatrix and their periodicity along the circular direction of the shell is taken into account. An infinite one-dimensional resolving system of stability equations for anisotropic cylindrical shells in the normal Cauchy form is derived. An algorithm is developed and, using the numerical method of discrete orthogonalization, a software package for a PC is written. In a single computational process, it combines the determination of the parameters of the subcritical stress-strain state and the solution of stability problems for cylindrical shells of tunnel structures in a spatial setting.

Ключові слова:
циліндрична оболонка, тунельна споруда, рівняння стійкості, тривимірна постановка, волокнистий композит
cylindrical shell, tunnel structure, stability equations, three-dimensional formulation, fiber composite.

Вступ. Аналіз останніх досліджень. В роботах присвячених розрахунку на стійкість оболонкових конструкцій, якими моделюється оправа тунельної споруди, в просторовій постановці [1, 2] увага зосереджена оболонках виготовлених з ізотропних чи ортотропних матеріалів. Застосування матеріалів з таким видом анізотропії звужує клас композитних конструкцій, які можливо використовувати в якості оправи тунелів. Зауважимо, що при підсиленні оболонкових систем з залізобетону, наприклад, волокнистими композитами шляхом їх намотування на циліндричну конструкцію виникає розбіжність між головними напрямками пружності ортотропного матеріалу та осями криволінійної системи координат оболонок (рис. 1). Матеріал таких конструкції у власних осях конструкції необхідно розглядати як такий, що має одну площину пружної симетрії та яка є паралельною до серединної поверхні оболонки. Наявність незначної кількості робіт присвячених аналізу стійкості оболонкових конструкцій з матеріалів пружні властивості яких мають одноплощинну симетрію пов’язана із складнощами, які виникають при складанні їх розрахункових моделей. Це викликано зв’язаністю деформацій розтягу (стиску), зсуву, згину та кручення. Однак, врахування цих особливостей напруженого стану дозволяє конструювати оболонкові системи при надійному забезпеченні їх несучої здатності, особливо, при меншій матеріаломісткості.

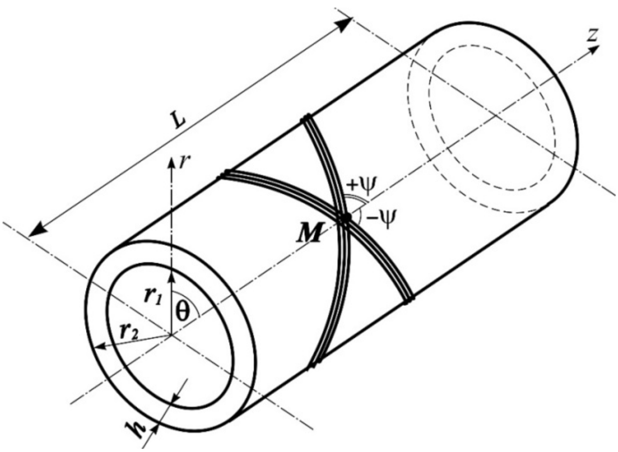

Рис. 1. Циліндрична анізотропна оболонка.

Мета дослідження. В представленій роботі розглянуто підхід до отримання тривимірних рівнянь стійкості циліндричних анізотропних шаруватих оболонок в просторовій постановці теорії пружності на основі модифікації функціонала узагальненого принципу Ху – Васідзу. Розв'язок системи рівнянь стійкості проводиться шляхом спільного застосування аналітичного методу Бубнова – Гальоркіна та числового дискретної ортогоналізації. За використанням зазначених методів досліджено стійкість циліндричних анізотропних шаруватих оболонок з матеріалу з однією площиною пружної симетрії під дією зовнішнього тиску.

Постановка задачі та методика розв'язку. У відповідності до варіаційного принципу Ху – Васідзу [3] рівняння стійкості, співвідношення пружності, геометричні співвідношення та відповідні граничні умови можуть бути отримані з умови стаціонарності функціоналу Π_1, що визначається з інтегралу:

$$\Pi_1 = \iiint\limits_V \left\{W\left(e_{ij}\right) - T\left(u_i\right) + \Phi\left(u_i\right) - \sigma_{ij}\left[e_{ij} - \frac{1}{2}\left(u_{i;j} + u_{j;i}\right)\right]\right\} dV +$$

$$+ \iint\limits_{S_1} \Psi\left(u_i\right) dS - \iint\limits_{S_2} p_i\left(u_i - \overline{u}_i\right) dS . \tag{1}$$

Тут варіюються без використання додаткових умов переміщення u_i, деформації e_{ij}, напруження σ_{ij}, напруження p_i на поверхні S_2, що викликані переміщеннями $\overline{u}_i$. Також в цьому функціоналі $W\left(e_{ij}\right)$ – потенціальна енергія деформації, $T\left(u_i\right)$ – кінетична енергія, $\Phi\left(u_i\right)$, $\Psi\left(u_i\right)$ – потенціали об'ємних і поверхневих навантажень, крапка з комою перед параметрами i, j позначає коваріантну похідну за координатою з відповідним індексом $i, j = 1, 2, 3$.

Потенціальну енергію деформації у векторно-матричному представленні запишемо так

$$W_1 = -\frac{1}{2}\sigma_1^T B_{11}^{-1}\sigma_1 - \frac{1}{2}\varepsilon_2^T\left(B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12}\right)\varepsilon_2 +$$

$$+\left(\varepsilon_1^T(u) + \varepsilon_2^T(u) B_{12}^T B_{11}^{-1}\right)\sigma_1 + \varepsilon_2^T(u)\left(B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12}\right)\varepsilon_2 . \tag{2}$$

де $\varepsilon_1^T = \left(\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{r\theta}, \varepsilon_{rz}\right)$, $\varepsilon_2^T = \left(\varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{z\theta}\right)$ – вектори деформацій, $\sigma_1^T = \left(\sigma_{rr}, \tau_{r\theta}, \tau_{rz}\right)$ – вектор напружень, B_{ij} (i, j =1, 2) – матриці коефіцієнтів пружності.

Для отримання системи рівнянь стійкості скористаємось такими розкладами у формі [4]:

$$\sigma_1 = \sigma_1^0 + \alpha\sigma_1^{(1)} + \alpha^2\sigma_1^{(2)};$$
$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^0 + \alpha\varepsilon_1^{(1)} + \alpha^2\varepsilon_1^{(2)};$$
$$\varepsilon_2 = \varepsilon_2^0 + \alpha\varepsilon_2^{(1)} + \alpha^2\varepsilon_2^{(2)}. \tag{3}$$

Тут параметри напружено-деформованого стану з нуликом – докритичні значення деформацій та напружень; з індексами (1) – збурені; з індексами (2) – теж, лише у квадраті; α - нескінченно мала стала, що незалежна від координат.

Підставивши (3) в (2), та провівши відповідні перетворення, отримаємо такий вираз для потенціальної енергії деформації

$$W_1 = -\frac{1}{2}\left(\sigma_1^0 + \alpha\sigma_1^{(1)} + \alpha^2\sigma_1^{(2)}\right)^T B_{11}^{-1}\left(\sigma_1^0 + \alpha\sigma_1^{(1)} + \alpha^2\sigma_1^{(2)}\right) -$$
$$-\frac{1}{2}\left(\varepsilon_2^0 + \alpha\varepsilon_2^{(1)} + \alpha^2\varepsilon_2^{(2)}\right)^T \left(B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12}\right)\left(\varepsilon_2^0 + \alpha\varepsilon_2^{(1)} + \alpha^2\varepsilon_2^{(2)}\right) +$$
$$+\left[\left(\varepsilon_1^0 + \alpha\varepsilon_1^{(1)} + \alpha^2\varepsilon_1^{(2)}\right)^T + \left(\varepsilon_2^0 + \alpha\varepsilon_2^{(1)} + \alpha^2\varepsilon_2^{(2)}\right)^T B_{12}^T B_{11}^{-1}\right] \times$$
$$\times\left(\sigma_1^0 + \alpha\sigma_1^{(1)} + \alpha^2\sigma_1^{(2)}\right) + \left(\varepsilon_2^0 + \alpha\varepsilon_2^{(1)} + \alpha^2\varepsilon_2^{(2)}\right)^T \times$$
$$\times\left(B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12}\right)\left(\varepsilon_2^0 + \alpha\varepsilon_2^{(1)} + \alpha^2\varepsilon_2^{(2)}\right).$$

(4)

Після підстановки (4) в (1) з умови стаціонарності варіації функціоналу (1) обумовленої зміною компонентів вектора переміщень u і напружень σ_1, при використанні виразів для напружень $\sigma_1^T = \left(\sigma_{rr}, \tau_{r\theta}, \tau_{rz}\right)$, переміщень $u^T = \left(u_r, u_\theta, u_z\right)$, геометричних співвідношень у формі [4]

$$\varepsilon_{zz}^{(1)} = \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial z}; \qquad \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}u_r^{(1)}; \qquad \varepsilon_{rr}^{(1)} = \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r};$$
$$\varepsilon_{z\theta}^{(1)} = \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial \theta}; \qquad \varepsilon_{rz}^{(1)} = \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial r};$$
$$\varepsilon_{r\theta}^{(1)} = \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial r} - \frac{1}{r}u_\theta^{(1)} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial \theta}, \tag{5}$$

нехтуючи залежностями для варіації кінетичної енергії та потенціалів поверхневих та об’ємних навантажень, прирівнюючи вирази при незалежних варіаціях напружень $\delta\sigma_{rr}$, $\delta\tau_{r\theta}$, $\delta\tau_{rz}$ й переміщень δu_r, δu_θ, δu_z в інтегралі за об’ємом V до нуля, отримаємо таку систему рівнянь стійкості в просторовій постановці анізотропних композитних циліндричних оболонок:

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}=-\frac{c_{23}+1}{r}\sigma_{rr}-\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}-\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}+\frac{c_{12}}{r}\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{c_{22}}{r^2}u_r+\frac{c_{22}}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+$$

$$+\frac{c_{26}}{r^2}\frac{\partial u_z}{\partial\theta}+\frac{c_{26}}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\left(-\frac{\partial u_z}{\partial z}c_{13}-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+u_r\right)c_{23}-\right.$$

$$-\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta}\right)c_{36}-\sigma_{rr}c_{33}+r\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}c_{13}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_r}{\partial\theta^2}c_{23}-\frac{2}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}c_{23}-$$

$$\left.-\frac{1}{r}u_r c_{23}+2\frac{\partial^2 u_r}{\partial z\partial\theta}c_{36}-2\frac{\partial u_\theta}{\partial z}c_{36}\right)\sigma_{rr}^0+\left(\left(-2r\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}c_{13}+\right.\right.$$

$$+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z\partial\theta}+\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)c_{23}+\left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z\partial\theta}\right)\times c_{36}+$$

$$\left.\left.+\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial z}c_{33}\right)-\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)\tau_{rz}^0+\left(-2\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial z\partial\theta}c_{13}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial\theta^2}+\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right)c_{23}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_z}{\partial\theta^2}\right)c_{36}+\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial\theta}c_{33}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{1}{r}u_\theta\right)\tau_{r\theta}^0;$$

$$\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}=\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial z}c_{13}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial\theta}c_{36}-\frac{1}{r}\tau_{rz}-c_{11}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}-\frac{2c_{16}}{r}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z\partial\theta}-$$

$$-\frac{c_{12}}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{c_{66}}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial\theta^2}-\frac{c_{12}+c_{66}}{r}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z\partial\theta}-\frac{c_{26}}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-c_{16}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}-$$

$$-\frac{c_{26}}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial\theta^2}+\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}-\tau_{r\theta}a_{45}-\tau_{rz}a_{55}+r\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}c_{13}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_z}{\partial\theta^2}c_{23}+\right.$$

$$+2\frac{\partial^2 u_z}{\partial\theta\partial z}c_{36}\Bigg)\sigma_{rr}^0+\left(-2r\left(-\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}+\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial z}a_{45}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}a_{55}\right)-\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\tau_{rz}^0+$$

$$+\left(-2\left(-\frac{\partial^2 u_r}{\partial z\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}a_{45}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial\theta}a_{55}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta}\right)\tau_{r\theta}^0;$$

$$\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial\theta}c_{23}+\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial z}c_{36}-\frac{2}{r}\tau_{r\theta}-\frac{c_{12}+c_{66}}{r}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z\partial\theta}-\frac{c_{22}}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-$$

$$-c_{66}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}-\frac{c_{22}}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial\theta^2}-\frac{c_{26}}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z}-c_{16}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}-\frac{c_{26}}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial\theta^2}-$$

$$-\frac{2c_{26}}{r}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z\partial\theta}+\Bigg(-\frac{1}{r}u_\theta+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-\tau_{r\theta}a_{44}-\tau_{rz}a_{45}+r\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}c_{13}+$$

$$+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial\theta^2}c_{23}+\frac{2}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}c_{23}-\frac{1}{r}u_\theta c_{23}+2\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z\partial\theta}c_{36}+2\frac{\partial u_r}{\partial z}c_{36}\Bigg)\sigma_{rr}^0+$$

$$+\left(-2r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial z}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_r}{\partial z\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial z}a_{44}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}a_{45}\right)-\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)\tau_{rz}^0+$$

$$+\left(-2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_r}{\partial\theta^2}+\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}a_{44}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial\theta}a_{45}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}-\frac{1}{r}u_r\right)\tau_{r\theta}^0;$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r}=\frac{\partial u_z}{\partial z}c_{13}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+u_r\right)c_{23}+\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta}\right)c_{36}+\sigma_{rr}c_{33};$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial r}=-\frac{\partial u_r}{\partial z}+\tau_{r\theta}a_{45}+\tau_{rz}a_{55};$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial r}=\frac{1}{r}u_\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\tau_{r\theta}a_{44}+\tau_{rz}a_{45}. \qquad (6)$$

В (6) r – радіус циліндра (рис. 1) незалежний від координат z та θ; σ_{rr}, τ_{rz}, $\tau_{r\theta}$ – компоненти вектора напружень $\sigma_1^T = (\sigma_{rr}, \tau_{r\theta}, \tau_{rz})$; u_z, u_θ, u_r – переміщення оболонки згідно напрямків відповідних осей z, θ, r. Напруження σ_{rr}^0, τ_{rz}^0 та $\tau_{r\theta}^0$ визначаються шляхом розв'язку задачі докритичного напружено-деформованого стану. Сталі c_{kl} (k, l=1, 2, 3, 6) – це характеристики матеріалу шару оболонки, що визначаються за допомогою механічних констант a_{kl} [5]:

$$c_{11} = \frac{1}{|A_{22}|}\left(a_{22}a_{66} - a_{26}^{\;2}\right); \qquad c_{12} = \frac{1}{|A_{22}|}\left(a_{16}^{i}a_{26} - a_{12}a_{66}\right);$$

$$c_{22} = \frac{1}{|A_{22}|}\left(a_{11}a_{66} - a_{16}^{\;2}\right); \qquad c_{16} = \frac{1}{|A_{22}|}\left(a_{12}^{i}a_{26} - a_{22}a_{16}\right);$$

$$c_{26} = \frac{1}{|A_{22}|}\left(a_{12}a_{16} - a_{11}a_{26}\right); \qquad c_{66} = \frac{1}{|A_{22}|}\left(a_{11}a_{22} - a_{12}^{\;2}\right);$$

$$|A_{22}| = a_{66}\left(a_{11}a_{22} - a_{12}^2\right) + a_{26}\left(a_{12}a_{16} - a_{11}a_{26}\right) + a_{16}\left(a_{12}a_{26} - a_{22}a_{16}\right);$$

$$c_{13} = a_{13}c_{11} + a_{23}c_{12} + a_{36}c_{16}; \qquad c_{23} = a_{13}c_{12} + a_{23}c_{22} + a_{36}c_{26};$$

$$c_{36} = a_{13}c_{16} + a_{23}c_{26} + a_{36}c_{66}; c_{33} = a_{33} - \left(a_{13}c_{13} + a_{23}c_{23} + a_{36}c_{36}\right). \quad (7)$$

Таким чином при використанні модифікованого варіаційного принципу Ху – Васідзу отримана тривимірна система з шести однорідних диференціальних рівнянь стійкості в частинних похідних відносно компонентів векторів $\sigma_1^T = (\sigma_{rr}, \tau_{r\theta}, \tau_{rz})$ і $u^T = (u_r, u_\theta, u_z)$.

Узагальнений закон Гука запишемо у вигляді:

$$\sigma_{zz} = c_{11}e_{zz} + c_{12}e_{\theta\theta} + c_{16}e_{z\theta} - c_{13}\sigma_{rr};$$

$$\sigma_{\theta\theta} = c_{12}e_{zz} + c_{22}e_{\theta\theta} + c_{26}e_{z\theta} - c_{23}\sigma_{rr};$$

$$\tau_{z\theta} = c_{16}e_{zz} + c_{26}e_{\theta\theta} + c_{66}e_{z\theta} - c_{36}\sigma_{rr};$$

$$e_{rr} = c_{13}e_{zz} + c_{23}e_{\theta\theta} + c_{36}e_{z\theta} + c_{33}\sigma_{rr};$$

$$e_{rz} = a_{45}\tau_{r\theta} + a_{55}\tau_{rz}; \qquad e_{r\theta} = a_{44}\tau_{r\theta} + a_{45}\tau_{rz}. \quad (8)$$

Розв’язок системи (6) повинен відповідати умовам на бічних поверхнях: при $r = r_1$

$$\sigma_{rr}^{0}(r_1, z, \theta) = 0; \quad \tau_{rz}^{0}(r_1, z, \theta) = 0; \quad \tau_{r\theta}^{0}(r_1, z, \theta) = 0;$$

і $r = r_2$

$$\sigma_{rr}^{n}(r_2, z, \theta) = 0; \quad \tau_{rz}^{n}(r_2, z, \theta) = 0; \quad \tau_{r\theta}^{n}(r_2, z, \theta) = 0. \qquad (9)$$

Умовам на торцях при $z = 0$, $z = L$ (рис. 1), наприклад

$$\sigma_{zz} = u_r = u_\theta. \qquad (10)$$

Умовам жорсткого контакту шарів для напружень та переміщень:

$$\sigma_{rr}^{i}(r_i) = \sigma_{rr}^{i+1}(r_i); \quad \tau_{rz}^{i}(r_i) = \tau_{rz}^{i+1}(r_i); \quad \tau_{r\theta}^{i}(r_i) = \tau_{r\theta}^{i+1}(r_i);$$

$$u_r^{i}(r_i) = u_r^{i+1}(r_i); \quad u_z^{i}(r_i) = u_z^{i+1}(r_i); \quad u_\theta^{i}(r_i) = u_\theta^{i+1}(r_i). \qquad (11)$$

Тут i – номер шару оболонки.

Зменшення розмірності тривимірної системи рівнянь стійкості (6) проведемо із використанням процедури методу Бубнова – Гальоркіна. Розкладемо функції, що описують напруження та деформації (6) в подвійні тригонометричні ряди так, щоб уздовж твірної z задовольнялись умови (10) та врахуємо періодичність в коловому напрямку θ:

$$\sigma_{rr}(r, z, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{1,pk}(r) \cos k\theta + y_{1,mk}^{/}(r) \sin k\theta \right] \sin\, l_m z;$$

$$\tau_{rz}(r, z, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{2,pk}(r) \cos k\theta + y_{2,mk}^{/}(r) \sin k\theta \right] \cos\, l_m z;$$

$$\tau_{r\theta}(r, z, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{3,pk}(r) \sin k\theta + y_{3,mk}^{/}(r) \cos k\theta \right] \sin\, l_m z;$$

$$u_r(r, z, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{4,pk}(r) \cos k\theta + y_{4,mk}^{/}(r) \sin k\theta \right] \sin\, l_m z;$$

$$u_z(r, z, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{5,pk}(r) \cos k\theta + y_{5,mk}^{/}(r) \sin k\theta \right] \cos\, l_m z;$$

$$u_\theta(r, z, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{6,pk}(r) \sin k\theta + y_{6,mk}^{/}(r) \cos k\theta \right] \sin\, l_m z. \qquad (12)$$

В (12) $y_{i,pk}$, $y_{i,mk}^{/}$ (i=1÷6) – складові компонент напружень σ_{rr}, τ_{rz}, $\tau_{r\theta}$ та переміщень u_r, u_z, u_θ, що розкладені за тригонометричними рядами

Фур'є, p, m, k – хвильові числа в рядах. Параметр $l_m = {m\pi}/{L}$, де L – довжина твірної циліндра (рис. 1).

Розділивши змінні в рівняннях (6) за використанням залежностей (12) отримаємо нескінчену одновимірну систему звичайних диференціальних рівнянь стійкості циліндричної оболонки в нормальній формі Коші

$$\frac{d\bar{y}}{dr} = T(r, \lambda)\bar{y}, \quad T(r, \lambda) = t_{i,j}(r, \lambda), \quad i = \overline{1,\infty}, \; j = \overline{1,\infty}. \qquad (13)$$

В (13) $\bar{y} = \{y_{1,pk}; y_{2,pk}; y_{3,pk}; y_{4,pk}; y_{5,pk}; y_{6,pk}; y'_{1,mk}; y'_{2,mk}; y'_{3,mk}; y'_{4,mk}; y'_{5,mk}; y'_{6,mk}\}$ розв'язуюча вектор-функція, $T(r, \lambda)$ – матриця із змінними коефіцієнтами, що залежить від аргументу r та параметра навантаження λ.

Система рівнянь стійкості (13) при умовах на поверхнях (9) розв'язується за використанням чисельного методу дискретної ортогоналізації [6, 7].

Реалізація пропонованої методики щодо встановлення величин критичних навантажень циліндричної оболонки тунелю. В якості представлення можливостей пропонованого в роботі підходу було вибрано об'єкт дослідження – колова циліндрична оболонка тунельної споруди. Представлено два варіанти такої конструкції: одношарова залізобетонна та двошарова. Для якої внутрішній залізобетонний шар підкріплений та одночасно захищений від впливу навколишнього середовища зовнішнім шаром з волокнистого композитного матеріалу – боропластику. Його головні напрямки пружності можуть бути повернуті на довільний кут ψ відносно твірної оболонкової конструкції.

Механічні характеристики матеріалів, що використано при виготовленні оболонки такі: залізобетон – E_{11}=3,1E_0, ν_{21}=0,2; боропластик – E_{11}=280E_0, E_{22}=E_{33}=31E_0, G_{12}=G_{23}=10,5E_0, G_{13}=21,2E_0, ν_{21}=0,25, ν_{12}=0,0277, E_0=10000МПа.

Геометричні розміри конструкції такі: радіус внутрішньої бокової поверхні r_1=4,9м, зовнішньої – r_2=5,1м, а довжина оболонки L=10,0м. У випадку двошарової конструкції геометричні характеристики за товщиною такі: залізобетонний шар r_{1s}=4,9м; r_{2s}=5,07м, шар боропластику: r_{1b}=5,07м; r_{2b}=5,1м, а довжина L така ж.

Оболонкова конструкція знаходиться під дією зовнішнього розподіленого бокового тиску q_0.

Проведено визначення величини критичних навантажень одношарової циліндричної оболонки та порівняно їх із результатами для двошарової при зміні кута ψ армування волокнистого композиту боропластика від 0^0 до 90^0.

Результати проведених за пропонованими методиками досліджень представлені в табл. 1.

Таблиця 1

Критичні навантаження розподіленого бокового тиску циліндричної оболонки тунельної споруди

Критичне наванта-ження	Залізобе-тонна оболонка	Двошарова циліндрична оболонка. Кут повороту головних напрямів пружності шару боропластику, ψ^0						
		0	15	30	45	60	75	90
q_{cr}, [МПа]	0,60	1,81	1,89	1,97	2,02	2,16	2,20	2,22

З аналізу результатів проведених досліджень приведених в табл. 1 видно, що підсилення залізобетонної циліндричної оболонки тунельної споруди по зовнішній поверхні однонапрямленим волокнистим композитом боропластиком веде до надійного збільшення величин критичних навантажень розподіленого зовнішнього бокового тиску q_{cr}. Так для кута повороту головних напрямів пружності боропластику $\psi=0^0$ розбіжність між порівнюваними результатами складає 300%. Водночас зростання кута ψ від 0^0 до 90^0 також веде до збільшення q_{cr}, яке може досягати 370% при 90^0 у порівнянні з критичною величиною, що отримана для залізобетонної оболонки.

Висновки. В роботі, спираючись на модифікований варіаційний принцип Ху – Васідзу, представлено підхід щодо побудови системи однорідних диференціальних рівнянь стійкості в частинних похідних просторової теорії пружності. Для приведення її до одновимірної використовується метод Бубнова – Гальоркіна. З його використанням проведено розкладення невідомих системи рівнянь вздовж твірної та в коловому напрямках у подвійні тригонометричні ряди. Для розв'язку одновимірної задачі в напрямку нормалі до серединної поверхні оболонки використовується метод дискретної ортогоналізації.

Проведено дослідження стійкості циліндричної залізобетонної оболонки тунельної споруди. Проаналізовано надійні зміни критичних навантажень зовнішнього розподіленого бокового тиску у випадку підсилення циліндричної оболонки волокнистим композитом при довільному куті його укладання.

1. *Гузь А.Н., Бабич И.Ю.* Пространственные задачи теории упругости и пластичности. Т.4. Трехмерная теория устойчивости деформируемых тел. – Киев: Наук. думка, 1985. - 280 с.

Guz' A.N., Babich I.YU. Prostranstvennyye zadachi teorii uprugosti i plastichnosti. T.4. Trekhmernaya teoriya ustoychivosti deformiruyemykh tel. – Kiyev: Nauk. dumka, 1985. - 280 s.

2. *Гузь А.Н.* Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. – К.: Вища шк., 1986. – 511 с.

Guz' A.N. Osnovy trekhmernoy teorii ustoychivosti deformiruyemykh tel. – K.: Vishcha shk., 1986. – 511 s.

3. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.

Vasidzu K. Variatsionnyye metody v teorii uprugosti i plastichnosti. – M.: Mir, 1987. – 542 s.

4. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. – Л. - М.: ОГИЗ, 1948. - 211 с.

Novozhilov V.V. Osnovy nelineynoy teorii uprugosti. – L. - M.: OGIZ, 1948. - 211 s.

5. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Наука, 1977. – 415 с.

Lekhnitskiy S.G. Teoriya uprugosti anizotropnogo tela. – 2-ye izd., ispr. i dop. – M.: Nauka, 1977. – 415 s.

6. Баженов В.А., Семенюк М.П., Трач В.М. Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок: Монографія. – К.: Каравела.- 2010. – 352 с.

BazhenovV.A., SemenyukM.P., TrachV.M. Neliniynedeformuvannya, stiykist′ izakrytychnapovedinkaanizotropnykhobolonok: Monohrafiya. – K.: Karavela.- 2010. – 352 s.

7. Григоренко Я. М., Влайков Г. Г., Григоренко А. Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей: Монографія. – К. : Академпериодика, 2006. – 472 с.

Grigorenko YA. M., Vlaykov G. G., Grigorenko A. YA. Chislenno-analiticheskoye resheniye zadach mekhaniki obolochek na osnove razlichnykh modeley: Monografiya. – K. : Akademperiodika, 2006. – 472 c.