

**ВПЛИВ ТИПУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ НА РЕЗУЛЬТАТИ
ДИНАМІЧНОГО АНАЛІЗУ МОСТОВОГО ПРОГОНУ**

**INFLUENCE OF THE TYPE OF FINITE ELEMENTS ON THE RESULTS
OF DYNAMIC ANALYSIS OF A BRIDGE SPAN**

Трач В.М., д.т.н., професор, ORCID: 0000-0001-9500-2743, Хоружий М.М., к.т.н., доцент, ORCID: 0000-0002-4546-9270, Бореичук Ю.В., студент (Національний університет водного господарства та природокористування)

Trach V.M., Doctor of Technical Sciences, Professor, ORCID: 0000-0001-9500-2743, Khoruzhyi M.M., Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, ORCID: 0000-0002-4546-9270, Boreichuk Y.V., student (National University of Water and Environmental Engineering)

Досліджено власні коливання типової залізобетонної прогонової будови автодорожнього моста за допомогою методу скінченних елементів (МСЕ) та виконано порівняльний аналіз результатів, отриманих при використанні різних підходів до скінченно-елементного моделювання.

Increasing traffic volumes, increasing weight and speed of vehicles, as well as trends in modern bridge construction towards the use of new materials and lightweight structures increase the sensitivity of bridges to dynamic impacts and make traditional static calculations using a dynamic coefficient insufficient. A key aspect of ensuring reliability and durability is the accurate determination of dynamic characteristics, in particular natural frequencies and vibration forms, to prevent dangerous resonance phenomena. The purpose of this paper is to study the natural vibrations of a typical reinforced concrete road bridge span structure using the finite element method (FEM) and to compare the results obtained using different approaches to finite element modeling. The study was carried out in the LIRA-FEM software package by performing a modal analysis. Two objects are considered: a single reinforced concrete beam of a 24 m long span structure and a complete bridge span structure of the same length, consisting of five beams connected by a monolithic slab. Two computational models were created for each object: the first one using a combination of universal spatial rod and plate finite elements; the second one using universal spatial volumetric (eight-node isoparametric) finite elements. The first three shapes and their corresponding frequencies of natural oscillations are determined. The analysis of the results for an isolated beam showed a relatively small difference in the values of natural frequencies between the rod and volume models, which indicates the

acceptability of using simpler models for individual beam elements. However, for the complete span structure, significant differences in frequencies between the two modeling approaches were found. This demonstrates the critical importance of choosing an adequate type of finite element to accurately model the dynamic behavior of complex spatial systems. The results confirm the effectiveness of FEM for the dynamic analysis of bridges and emphasize the need for a careful approach to the creation of computational models.

Ключові слова: динамічний аналіз, мостовий прогін, метод скінченних елементів (МСЕ), модальний аналіз, власні частоти, форми коливань, dynamic analysis, bridge span, finite element method (FEM), modal analysis, natural frequencies, waveforms.

Вступ. Прогонові конструкції є ключовими елементами мостових споруд, що піддаються складним динамічним навантаженням, таким як рух транспорту, вітрові впливи чи сейсмічна активність. Для оцінки їхньої поведінки та забезпечення надійності широко застосовується метод скінченних елементів (МСЕ), який дозволяє моделювати напружено-деформований стан конструкції [1-6]. Однак точність і достовірність результатів динамічного аналізу значною мірою залежать від вибору типу скінченних елементів (СЕ), що використовуються в моделі. Різні типи елементів – від одновимірних балкових до тривимірних об'ємних – мають свої особливості, які впливають на врахування геометричних характеристик, граничних умов і розподілу навантажень. У цій статті розглядається вплив типу скінченних елементів на результати динамічного аналізу мостового прогону, аналізуються переваги та недоліки різних підходів до моделювання, а також надаються рекомендації щодо оптимального вибору елементів для підвищення точності прогнозування поведінки конструкції.

Аналіз останніх досліджень. Дослідження власних коливань мостових конструкцій є важливим аспектом їхнього динамічного аналізу, оскільки ці характеристики визначають реакцію споруди на зовнішні впливи. Метод скінченних елементів (МСЕ) є основним інструментом для моделювання таких систем, однак результати значною мірою залежать від типу скінченних елементів, що використовуються в аналізі [4-6]. У цьому контексті проведено аналіз досліджень, які висвітлюють вплив типу елементів на точність визначення власних частот і форм коливань мостових прогонів.

Одним із ключових напрямів досліджень є порівняння результатів, отриманих за допомогою одновимірних (балкових), двовимірних (пластинчастих) і тривимірних (об'ємних) скінченних елементів. Балкові елементи, які базуються на теорії Ейлера-Бернуллі або Тимошенка, часто застосовуються для спрощених моделей мостових прогонів завдяки їхній обчислювальній ефективності. Проте, як зазначається в літературі [4-6], такі моделі можуть недооцінювати вплив поперечних деформацій і складних

геометричних особливостей, що призводить до неточностей у визначенні вищих частот коливань. Наприклад, дослідження показують, що при аналізі мостів із широкими прогонами або нестандартними перерізами (наприклад, коробчастими) балкові елементи дають похибку до 10-15% порівняно з експериментальними даними.

Двовимірні пластинчасті елементи, які враховують згин і мембранні ефекти, демонструють кращу точність для плоских елементів мостових конструкцій, таких як плити проїзної частини. Вони дозволяють моделювати розподіл напружень у двох напрямках, що є важливим для оцінки локальних коливань. Однак ці елементи менш ефективні для конструкцій із значною висотою прогону, де тривимірні ефекти стають суттєвими. Дослідження вказують, що при переході від двовимірних до тривимірних моделей розбіжність у власних частотах може сягати 5-7%, особливо для мостів із складною просторовою конфігурацією.

Тривимірні об'ємні елементи забезпечують найвищу точність, оскільки враховують усі компоненти напружено-деформованого стану, включаючи зсув, кручення та взаємодію між елементами конструкції (наприклад, між прогоном і опорами). Проте їхнє використання пов'язане з високими обчислювальними витратами, що робить їх менш практичними для попереднього аналізу. У роботах, присвячених аналізу кабельних або висячих мостів, тривимірні моделі виявилися незамінними для врахування нелінійних ефектів, таких як провисання тросів, що суттєво впливає на власні коливання.

Ще одним важливим аспектом є вплив густоти скінченно-елементної сітки. Дослідження показують, що недостатня деталізація сітки може призводити до значних помилок у визначенні власних частот, особливо для вищих мод коливань [4-6]. Наприклад, при зменшенні розміру елементів у зонах концентрації напружень (біля опор або вузлів) точність підвищується на 3-5%. Водночас надмірна деталізація призводить до невиправданого зростання часу обчислень без суттєвого поліпшення результатів.

Окремі роботи присвячені порівнянню типів інтерполяційних функцій у скінченних елементах (лінійних, квадратичних, кубічних) [7]. Використання елементів із вищими порядками апроксимації (наприклад, квадратичних або кубічних) дозволяє точніше відтворювати складні форми коливань, однак це також збільшує складність підготовки моделі. Для мостових прогонів із регулярною геометрією лінійні елементи часто виявляються достатніми, тоді як для конструкцій із різкими змінами перерізу чи матеріалів рекомендуються елементи вищого порядку.

Експериментальні дослідження, які порівнюють чисельні результати з даними натурних випробувань, підкреслюють важливість правильного вибору типу елементів залежно від мети аналізу. Наприклад, для оцінки глобальних власних частот простих балкових мостів достатньо одновимірних моделей, тоді як для детального аналізу локальних ефектів (наприклад, коливань плит або опор) необхідні тривимірні моделі. Похибка між

Узагальнюючи, тип скінченних елементів суттєво впливає на точність визначення власних коливань мостових конструкцій. Вибір між спрощеними (1D, 2D) і деталізованими (3D) моделями залежить від компромісу між точністю, обчислювальними ресурсами та специфікою конструкції. Сучасні дослідження рекомендують адаптивний підхід, який поєднує різні типи елементів у межах однієї моделі (наприклад, балкові для прогону та об'ємні для опор), щоб оптимізувати аналіз.

Technical drawing of a bridge structure. The main span is labeled 24000. The supports on either side are labeled 300. The text "вісь опирання" (axis of support) is shown twice, pointing to the support locations. The drawing includes dashed lines indicating the internal structure and the ground level.

Figure 1 consists of two technical drawings. Drawing (a) is a plan view of the bridge deck, showing a total width of 9700 mm. It features a central section of 7000 mm and two side sections of 1350 mm each. The deck is supported by four piers, with a center-to-center spacing of 1700 mm between them. Drawing (b) is a section view of the bridge deck, showing a total height of 1100 mm. It details the cross-section of the deck, including the top slab, the internal structure, and the bottom slab. Key dimensions include a top width of 600 mm, a top slab thickness of 480 mm, a central opening width of 480 mm, and a bottom slab thickness of 153 mm. The drawing also shows the radius of the bottom slab (R100) and the height of the side walls (45 mm).

Методика досліджень. Для чисельного моделювання та аналізу використовувався програмний комплекс ЛІРА-САПР, що реалізує метод скінченних елементів [9]. Динамічні параметри визначалися за допомогою

спеціалізованого модуля «Модальний аналіз». Цей модуль обчислює власні форми та частоти коливань без проведення аналізу напружено-деформованого стану від динамічних навантажень. При формуванні матриці мас конструкції враховувалася власна вага елементів, яка автоматично збиралася зі статичного завантаження.

Дослідження проводилося у два етапи. На першому етапі виконаний модальний аналіз окремої залізобетонної балки прогонової будови довжиною 24 м. Було створено дві СЕ моделі:

- **Варіант Б1** – використаний універсальний просторовий стержневий СЕ №10 (рис. 3).
- **Варіант Б2** – використані універсальні просторові ізопараметричні шестивузловий СЕ №34 та восьмивузловий СЕ №36 (рис. 4).

В поздовжньому напрямку балка розбита на 80 ділянок довжиною по 0,3 м кожна. Граничні умови відповідали шарнірно-нерухомому обпиранню при $x=0,3$ м ($X=Y=Z=0$) та шарнірно-рухомому при $x=23,7$ м ($Y=Z=0$). Матеріал балки: бетон класу C25/30, модуль пружності 30 ГПа.

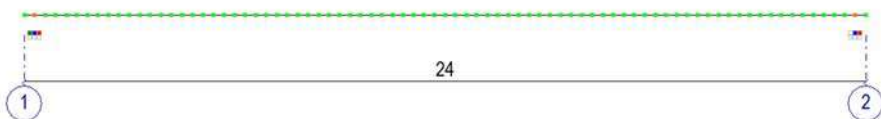


Рис. 3. СЕ модель балки за варіантом Б1

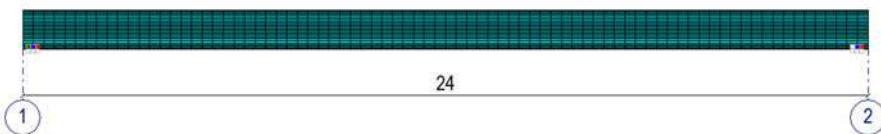


Рис. 4. СЕ модель балки за варіантом Б2

На другому етапі виконаний модальний аналіз повного мостового прогону показаного на рис. 2. Було створено дві СЕ моделі:

- **Варіант М1** – балки моделювалися стержневими СЕ №10, плита – прямокутними оболонковими СЕ №41 (рис. 5).
- **Варіант М2** – вся конструкція (балки та плита) моделювалася об'ємними ізопараметричними СЕ №34 та СЕ №36 (рис. 6).

Розбиття на скінченні елементи, граничні умови та призначені матеріали були аналогічними до моделі балки.

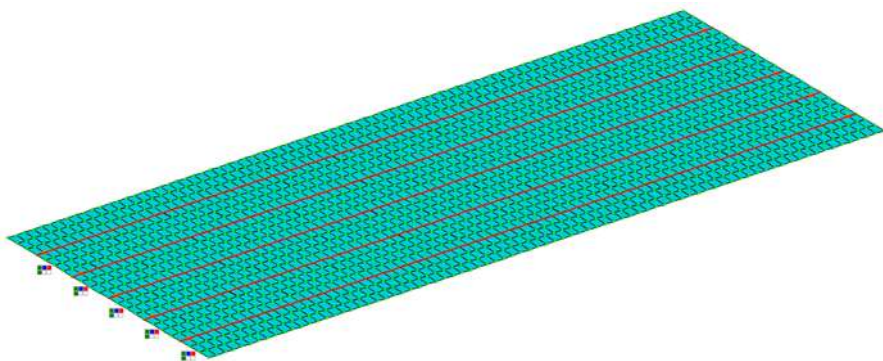


Рис. 5. СЕ модель мостового прогону за варіантом М1

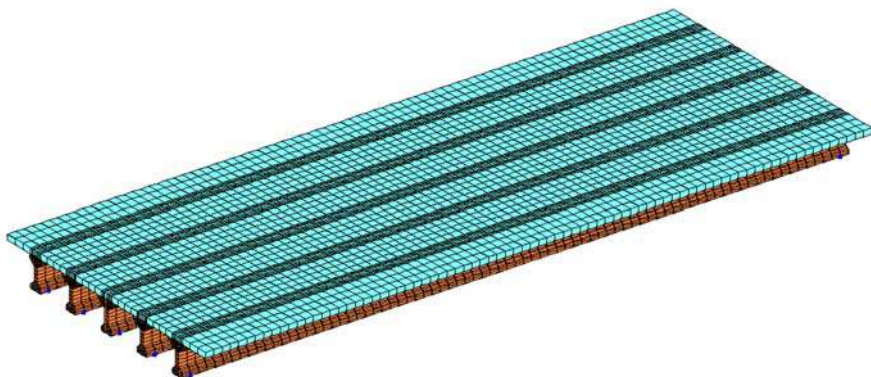


Рис. 6. СЕ модель мостового прогону за варіантом М2

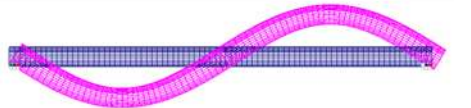
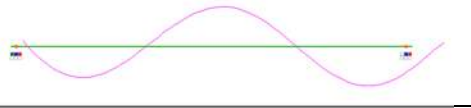
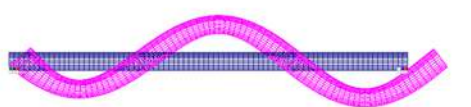
Результати досліджень. Результати модального аналізу для окремої балки, змодельованої за двома варіантами, представлені в таблиці 1.

Таблиця 1

Результати розрахунку власних коливань окремої балки

№ форми	Варіант	Форма коливань	Частота, Гц	Δ , %
1	Б1		3,886	0,4
	Б2		3,903	

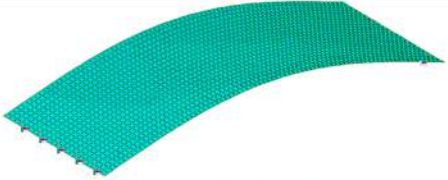
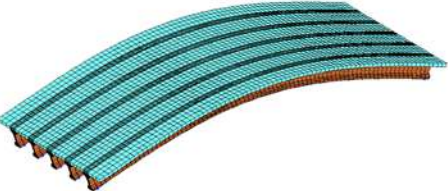
Продовження таблиці 1

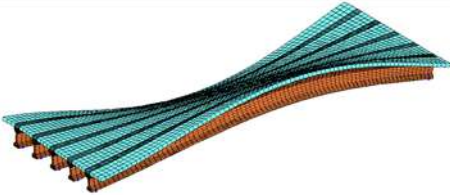
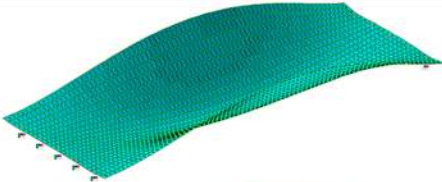
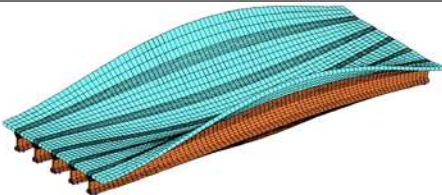
2	Б1		14,894	0,5
	Б2		14,974	
3	Б1		29,379	1,1
	Б2		29,067	

Результати модального аналізу для мостового прогону, змодельованого за двома варіантами, наведені в таблиці 2.

Таблиця 2

Результати розрахунку власних коливань мостового прогону

№ форми	Варіант	Форма коливань	Частота, Гц	Δ , %
1	М1		2,684	2,2
	М2		2,743	
2	М1		4,186	0,9

2	M2		4,224	
3	M1		8,781	2,2
	M2		8,596	

Висновки та рекомендації. Проведене дослідження підтверджує ефективність методу скінченних елементів (МСЕ), реалізованого в ПК LIRA-FEM, як інструменту для визначення динамічних характеристик (власних частот та форм коливань) залізобетонних мостових прогонових будов. Можливості візуалізації форм коливань, що надаються програмним комплексом, є цінним інструментом для аналізу та розуміння динамічної поведінки конструкції.

Модальний аналіз окремої балки довжиною 24 м показав, що перші три форми коливань мають типовий згинальний характер. Порівняння результатів, отриманих з використанням стержневих (варіант Б1) та об'ємних (варіант Б2) скінченних елементів, виявило дуже малу розбіжність у значеннях власних частот, що не перевищує 1.1% для перших трьох форм.

Аналіз повної прогонової будови моста також продемонстрував високу збіжність результатів між спрощеною моделлю (варіант М1) та деталізованою об'ємною моделлю (варіант М2). Максимальна розбіжність у власних частотах для перших трьох форм коливань не перевищила 2.2%. Форми коливань для прогонової будови мали складніший згинально-крутильний характер.

Для дослідженого типу мостової конструкції (балковий залізобетонний прогін з монолітною плитою) встановлено, що використання комбінованої моделі зі стержневих та пластинчастих (оболонкових) скінченних елементів забезпечує достатню для інженерних розрахунків точність визначення

перших власних частот та форм коливань, порівняно з моделюванням об'ємними елементами.

Зважаючи на близькість результатів та значно меншу обчислювальну складність і трудомісткість підготовки моделі, для динамічного аналізу стандартних балочних мостових прогонів рекомендується використання спрощених розрахункових моделей (стержневі та пластинчасті СЕ), що є більш раціональним підходом порівняно із застосуванням об'ємних скінченних елементів для визначення глобальних динамічних характеристик. Проте, застосування об'ємних СЕ, хоч і є більш трудомістким, може бути необхідним для адекватного динамічного аналізу складних мостових систем.

1. Дубенець В. Г., Хільчевський В. В., Савченко О. В. Основи методу скінченних елементів: навчальний посібник. Чернігів: ЧДТУ, 2007. 288 с.
2. Clough R. W., Penzien J. Dynamics of Structures. New York: McGraw-Hill, 1993. 738 p.
3. Cook R. D., Malkus D. S., Plesha M. E., Witt R. J. Concepts and Applications of Finite Element Analysis. 4th ed. Wiley, 2001. 784 p.
4. Reddy J. N. An Introduction to the Finite Element Method. 3rd ed. McGraw-Hill, 2005. 766 p.
5. Bathe K. J. Finite Element Procedures. – 2nd ed. – Prentice Hall, 2014. 1037 p.
6. Craig R. R., Kurdila A. J. Fundamentals of Structural Dynamics. 2nd ed. Wiley, 2006. 744 p.
7. Yang Y. B., Kuo S. R. Theory and Analysis of Nonlinear Framed Structures. Prentice Hall, 1994. 450 p.
8. В.М. Трач, М.М. Хоружий. Власні коливання балкових конструкцій мостових споруд. Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. Збірник наукових праць. 2023. 44, С.214-221.
9. Програмний комплекс ЛІРА-САПР. Приклади розрахунку і проектування. К.: LIRALAND, 2023. 635 с. URL: https://lira.land/public_private/lira/2023/lira_sapr_examples_ua.pdf