

УДОСКОНАЛЕННЯ ІМПУЛЬСНОГО МЕТОДУ РОЗРАХУНКУ ОДНОМАСОВИХ СИСТЕМ НА ДИНАМІЧНІ ВПЛИВИ

ENHANCEMENT OF THE IMPULSE METHOD FOR THE ANALYSIS OF SINGLE-DEGREE-OF-FREEDOM SYSTEMS UNDER DYNAMIC LOADS

Кочкаръов Д.В., д.т.н., проф., ORCID 0000-0002-4525-7315 (Національний університет водного господарства та природокористування); **Азізов Т.Н., д.т.н., проф.,** ORCID 0000-0001-9621-9805 (Сумський національний аграрний університет); **Грищенко О.Д., аспірант,** ORCID 0009-0004-1851-6571 (Національний університет водного господарства та природокористування)

Dmitro Kochkarev, Doctor of Engineering, Professor (National University of Water and Environment Engineering, Ukraine); **Taliat Azizov, Doctor of Engineering, Professor,** (Sumy National Agrarian University, Ukraine); **Oleksandr Hryshchenko, Phd graduate student** (National University of Water and Environment Engineering, Ukraine)

У статті запропонована аналітична методика удосконалення імпульсного методу розрахунку одномасових систем під дією короткочасних динамічних навантажень. Виведено формулу для визначення еквівалентної квазістатичної сили через імпульс навантаження та власну частоту системи. Показано, що точність цього наближення залежить від відношення тривалості імпульсу t_0 до власного періоду коливань T . На підставі рішення рівняння руху методом Дюамеля для спадного трикутного імпульсу отримано поправочний коефіцієнт $k(\alpha)$. Цей множник дозволяє оцінювати амплітуду коливань у різному діапазоні t_0/T без повного чисельного інтегрування в часі. Наведені практичні алгоритми застосування та рекомендації для інженерних розрахунків.

The article presents an improved impulse-based method for analyzing single-degree-of-freedom systems subjected to short-term dynamic actions, such as impact or explosion. The classical impulse method is widely used in engineering practice for simplified assessment of instantaneous loads, where the impulse energy is transmitted to the structure as an increment of velocity. However, this approach provides accurate results only when the duration of the impulse is very short compared to the system's natural period. When the load duration is comparable to or longer than the natural vibration period, the computational method requires refinement. The study proposes an enhanced impulse approach that allows the evaluation of the dynamic response of the system without performing numerical time integration. The loading is considered in

the form of a decaying triangular pulse, representing a typical time history of pressure generated by an impact or blast wave. Analytical analysis of an undamped single-mass system is carried out, and a correction coefficient is introduced to account for the influence of the impulse duration on the maximum displacement amplitude. It is shown that the proposed methodology provides a smooth transition between instantaneous impulse action and quasi-static loading, producing accurate results over a wide range of ratios between the impulse duration and the natural vibration period. A comparative analysis for a simply supported beam was conducted, demonstrating that the use of the correction coefficient significantly improves the agreement between the analytical estimate of maximum displacement and results obtained from numerical integration. The analysis revealed that the classical impulse method underestimates peak displacements for moderate impulse durations, whereas the proposed methodology ensures consistency with exact solutions across the entire range of t_0/T ratios. The results of the comparison confirmed the efficiency of the approach for practical structural design, particularly when evaluating the effects of short-term impact and blast loads on beams with various support conditions. The proposed method simplifies the engineering analysis of the dynamic behavior of structural elements, reduces the volume of numerical calculations, and provides high accuracy in determining maximum deformations and displacements. Its use is suitable for assessing the safety and dynamic stability of structures under short-duration loads and can be further extended to multi-modal systems and more complex structural configurations. The study results can serve as a basis for developing standardized engineering guidelines and methodological approaches to the design of building elements considering dynamic effects of impulse loads.

Ключові слова: імпульсний метод, система з одним ступенем вільності, короткочасне навантаження, удар, вибух, квазістатичний відгук, динамічний аналіз

impulse method, single-degree-of-freedom system, short-duration load, impact, explosion, quasi-static response, dynamic analysis

Аналіз досліджень і постановка задачі. Проблема оцінки динамічної реакції одномасових систем під дією короткочасних імпульсних навантажень розглядалася у працях багатьох дослідників. Класичні підходи, викладені в роботах [4], базуються на аналітичному розв'язанні рівняння руху з використанням інтегралу Дюамеля, що дозволяє описати відгук системи на довільне навантаження. Проте у більшості практичних випадків інженери застосовують спрощений імпульсний метод, у якому короткий імпульс навантаження замінюють еквівалентною початковою швидкістю або квазістатичною силою. Такий підхід ефективний за умови малої тривалості імпульсу ($t_0/T \ll 1$), але втрачає точність при збільшенні цього відношення.

Сучасні дослідження [1–3, 5] спрямовані на розширення застосовності імпульсних методів за рахунок аналітичних або чисельних корекцій. Зокрема, [1, 2] навели детальні порівняння між аналітичними та чисельними рішеннями для різних типів імпульсів, що підтвердило залежність амплітуди від параметра ωt_0 . Автори [3] запропонували алгоритм для оцінки реакції конструкцій на імпульсні навантаження із використанням еквівалентних імпульсів різної форми. У роботі [5] розглянуто узагальнені коефіцієнти переходу від багатомасових до еквівалентних одномасових моделей, що підтверджує актуальність удосконалення спрощених підходів. Таким чином, аналіз джерел показує, що хоча імпульсний метод є ефективним інженерним інструментом, він потребує вдосконалення шляхом урахування впливу тривалості імпульсу.

Метою даної статті є удосконалення імпульсного методу розрахунку одномасових систем на короткочасні динамічні впливи шляхом аналітичного врахування впливу тривалості імпульсу відносно власного періоду коливань системи.

Викладення основного матеріалу. Для удосконалення імпульсного методу розрахунку одномасових систем розглянемо вплив форми імпульсу та тривалості дії навантаження на максимальну амплітуду коливань. Відомо, що класичний імпульсний метод базується на еквівалентній квазістатичній силі, яка забезпечує правильну оцінку реакції системи лише за умови коротких імпульсів ($t_0/T \ll 1$). Для розширення області застосування методу необхідно встановити співвідношення між реальною амплітудою коливань, отриманою з точного розв'язку рівняння руху, та амплітудою, визначеною спрощеним імпульсним підходом. З цією метою спочатку отримаємо аналітичний вираз для амплітуди коливань одномасової системи під дією спадного трикутного імпульсу без демпфування, а потім порівняємо його з амплітудою, що відповідає миттєвому імпульсу. Відношення цих двох амплітуд визначатиме поправочний коефіцієнт $k(\alpha)$, який враховує скінченну тривалість дії навантаження та фазові особливості коливального процесу.

Розглянемо елемент конструкції у вигляді простої коливальної системи з одним ступенем свободи, що складається з маси m та пружини з жорсткістю k . Для більш надійного розрахунку демпфуванням знехтуємо. Рух нашої системи під дією зовнішньої сили $P(t)$ без врахування демпфування описується загальновідомим диференціальним рівнянням другого порядку:

$$m \cdot \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + k \cdot x(t) = P(t), \quad (1)$$

де: m – ефективна маса конструкції; k – коефіцієнт жорсткості конструкції; $x(t)$

– прогин (зміщення) в момент часу t ; $m \cdot \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$ – прискорення в момент часу

t ; $P(t)$ – функція зовнішньої сили від вибуху в момент часу t .

Імпульс I за визначенням є інтегралом від сили по часу її дії t_0 :

$$I = \int_0^{t_0} P(t) dt. \quad (2)$$

Однією з найважливіших умов імпульсного режиму є те, що час дії навантаження t_0 є надзвичайно коротким порівняно з періодом власних коливань конструкції T . За цей час масивна конструкція не встигає повністю зреагувати на цю дію.

Проінтегруємо рівняння руху (1) по часу від 0 до t_0 :

$$\int_0^{t_0} m \cdot \frac{d^2 x(t)}{dt^2} dt + \int_0^{t_0} k \cdot x(t) dt = \int_0^{t_0} P(t) dt. \quad (3)$$

Проаналізуємо кожен член виразу (3):

$$1. I = \int_0^{t_0} P(t) dt \text{ (за визначенням імпульсу).}$$

$$2. \int_0^{t_0} m \cdot \frac{d^2 x(t)}{dt^2} dt = m \cdot \left(\frac{dx(t_0)}{dt} \right) - m \cdot \frac{dx(0)}{dt} \quad \text{Це зміна імпульсу (кількості руху) системи.}$$

$$3. \int_0^{t_0} k \cdot x(t) dt \approx 0. \text{ Оскільки час } t_0 \text{ дуже малий, зміщення } x(t) \text{ за цей час є незначним, тому цим членом можна знехтувати.}$$

Припускаючи, що конструкція перебувала у стані спокою до удару $\frac{dx(0)}{dt} = 0$ ми отримуємо:

$$m \cdot \left(\frac{dx(t_0)}{dt} \right) = I. \quad (4)$$

Звідси ми знаходимо початкову швидкість (v_0), яку конструкція отримує одразу після удару:

$$v_0 = \frac{dx(t_0)}{dt} = \frac{I}{m}. \quad (5)$$

Після того, як імпульс закінчився ($t > t_0$), зовнішня сила $P(t)=0$. Конструкція починає вільні коливання з початковою швидкістю $v_0 = I/m$ та нульовим початковим зміщенням. Рівняння руху спрощується:

$$m \cdot \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + k \cdot x(t) = 0. \quad (6)$$

Розв'язком цього рівняння є синусоїда

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t) + B \cdot \cos(\omega t),$$

де $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – власна частота коливань.

З початкових умов $x(0)=0$ та $dx(0)/dt = v_0$ знаходимо, що максимальний прогин конструкції $x_{\max}$ дорівнює амплітуді коливань:

$$x_{\max} = \frac{v_0}{\omega} = \frac{\frac{I}{m}}{\omega} = \frac{I}{m \cdot \omega}. \quad (7)$$

За визначенням, еквівалентне статичне навантаження P_{es} – це сила, яка статично створює такий самий максимальний прогин (за законом Гука):

$$P_{\text{es}} = k \cdot x_{\max}. \quad (8)$$

Підставимо у вираз (8) формулу (7) для $x_{\max}$, після перетворень отримаємо

$$P_{\text{es}} = k \frac{I}{m \cdot \omega}, \quad P_{\text{es}} = k \cdot x_{\max}. \quad (9)$$

Тепер з виразу $\omega = \sqrt{k / m}$, визначимо $k = m \cdot \omega^2$. Підставимо цей вираз у (9):

$$P_{\text{es}} = m \cdot \omega^2 \frac{I}{m \cdot \omega}. \quad (10)$$

Провівши не складні перетворення виразу (10), остаточно отримаємо вираз для визначення еквівалентної сили залежно від миттєвого імпульсу та частоти коливань

$$P_{\text{es}} = I \cdot \omega. \quad (11)$$

Для зручності використання у практичних розрахунках приведемо аналогічний вираз для визначення еквівалентної сили залежно від миттєвого імпульсу та періоду коливань

$$P_{\text{es}} = I \cdot \frac{2\pi}{T}. \quad (12)$$

Отримані вирази (10) та (11) дозволяють проводити інженерні розрахунки основних несучих конструкцій на дію миттєвих імпульсів. Загально прийнято імпульсний метод розрахунку використовувати для розрахунку будівель та споруд на дію ударної повітряної хвилі при відношенні часу дії навантаження до періоду коливань (основного тону) $\theta = t_0/T \leq 0.20$.

Для імпульсного навантаження у вигляді спадного трикутника запишемо функцію тиску:

$$P(t) = \begin{cases} P_0 \left(1 - \frac{t}{t_0} \right), & 0 \leq t \leq t_0 \\ 0, & t > t_0. \end{cases} \quad (13)$$

Визначимо імпульс навантаження

$$I = \int_0^{t_0} P(t) dt = \frac{2P_0}{t_0}. \quad (14)$$

Введемо позначення $F_0 = P_0/m$ та безрозмірний параметр $\alpha = \omega t_0$ та визначимо пікову амплітуду для навантаження у вигляді спадного трикутника (див. (7))

$$x_{im} = \frac{I}{m\omega} = \frac{F_0 t_0}{2\omega}. \quad (15)$$

Розв'язок рівняння (за нульових початкових умов до початку навантаження) подається інтегралом Дюамеля:

$$x(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t p(\tau) \sin(\omega(t - \tau)) d\tau, \quad p(\tau) = \frac{P(\tau)}{m} = F_0 \left(1 - \frac{\tau}{t_0}\right). \quad (16)$$

Нас цікавить стан системи у момент закінчення імпульсу $t=t_0$. Зробимо заміну змінної $u=t_0-\tau$. Тоді

$$x(t_0) = \frac{1}{\omega} \int_0^{t_0} F_0 \frac{u}{t_0} \sin(\omega u) du = \frac{F_0}{\omega t_0} \int_0^{t_0} u \sin(\omega u) du. \quad (17)$$

Аналогічно похідна виразу (16) в момент t_0 :

$$\dot{x}(t_0) = \frac{F_0}{t_0} \int_0^{t_0} u \cos(\omega u) du. \quad (18)$$

Обчислимо обидва інтеграли виразів (17) та (18) аналітично:

$$\int_0^{t_0} u \sin(\omega u) du = \frac{-t_0 \omega \cos(\omega t_0) + \sin(\omega t_0)}{\omega^2}, \quad (19)$$

$$\int_0^{t_0} u \cos(\omega u) du = \frac{t_0 \omega \sin(\omega t_0) + \cos(\omega t_0) - 1}{\omega^2}. \quad (20)$$

Підставимо вирази (19), (20) у (17) та (18), і після не складних перетворень отримаємо:

$$x(t_0) = \frac{F_0}{\omega^3 t_0} (-t_0 \omega \cos \alpha + \sin \alpha) = \frac{F_0}{\omega^2} \left(-\cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{\alpha}\right), \quad (21)$$

$$\dot{x}(t_0) = \frac{F_0}{\omega^2 t_0} (t_0 \omega \sin \alpha + \cos \alpha - 1) = \frac{F_0}{\omega} \sin \alpha + \frac{F_0}{\omega^2 t_0} (\cos \alpha - 1). \quad (22)$$

Для компактності виразів введемо позначення $C = \frac{F_0}{\omega^2}$. Тоді

$$x(t_0) = C \left(-\cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{\alpha}\right), \quad (23)$$

$$\frac{\dot{x}(t_0)}{\omega} = C \left(\frac{\alpha \sin \alpha + \cos \alpha - 1}{\alpha}\right). \quad (24)$$

Після закінчення навантаження система виконує вільні коливання з початковими умовами $x(t_0)$, $\dot{x}(t_0)$. Для незатухаючої системи пікова амплітуда вільної відповіді виражається через ці початкові умови як максимум амплітуди для синусоїдальної вільної відповіді:

$$x_t = \sqrt{x(t_0)^2 + \left(\frac{\dot{x}(t_0)}{\omega}\right)^2}. \quad (25)$$

Підставимо у формулу (25) вирази (23) та (24).

$$x_t = \frac{F_0}{\omega^2} \sqrt{\left(-\cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\alpha \sin \alpha + \cos \alpha - 1}{\alpha}\right)^2}. \quad (26)$$

Знайдемо відношення шуканих амплітуд

$$k(\alpha) = \frac{x_t}{x_{im}} = \frac{1}{(\alpha/2)} \sqrt{\left(-\cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\alpha \sin \alpha + \cos \alpha - 1}{\alpha}\right)^2}. \quad (27)$$

Провівши не складні перетворення (26) остаточно отримаємо

$$k(\alpha) = \frac{2}{\alpha^2} \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha \sin \alpha - 2\cos \alpha + 2}, \quad \alpha = \omega t_0. \quad (28)$$

Розглянемо граничні випадки та наближення:

1. Малий аргумент $\alpha \rightarrow 0$. Розклад у ряд Тейлора дає $k(\alpha) = 1 - \frac{\alpha^2}{36} + O(\alpha^4)$.
тобто для дуже коротких імпульсів ($t_0 \ll T$) імпульсний підхід практично точний.
2. Великий аргумент $\alpha \gg 1$, функція $k(\alpha)$ асимптотично наближається до $2/\alpha$ при значно довших за період імпульсах, дія наближається до квазістатичної.

Формула (28) дозволяє аналітично коригувати просту імпульсну оцінку без чисельного інтегрування у часі – досить множник $k(\alpha)$. Для застосування в багатомодових системах ту саму процедуру слід застосувати для кожної моди: обчислити модальний імпульс I_r , $x_{r,im} = I_r / (m_r \omega_r)$, $\alpha_r = \omega_r t_0$, потім $x_r = k(\alpha_r) x_{r,im}$ і комбінувати модальні піки (SRSS, CQC або складання в часі). Якщо враховується демпфінг невеликого порядку, у більшості практичних випадків можна замінити ω на $\omega_d = \omega \sqrt{1 - \zeta^2}$ у визначенні α для отримання приблизно коректних результатів; для більших ζ потрібне пряме інтегрування з експонентою.

На прикладі вільно обпертої балки на двох опорах завантаженою динамічними силами покажемо використання запропонованої методики. Власна вага балочного перекриття складає $q_v = 10 \text{ кН/м}^2$. Поперечний переріз балок прийнятий $b \times h = 400 \times 600 \text{ мм}$. Згинальна жорсткість балки складає $EI = 176520 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$. Балки розташовуються з кроком 2 м . Розрахунок будемо виконувати на вплив вибухової хвилі безпілотного летального апарату типу «Шахед» $W_1 = 50 \text{ кг}$, при його вибуху на відстані $R = 6 \text{ м}$. Розглядаємо наземний вибух. Розрахункова схема балки представлена на рис.1.

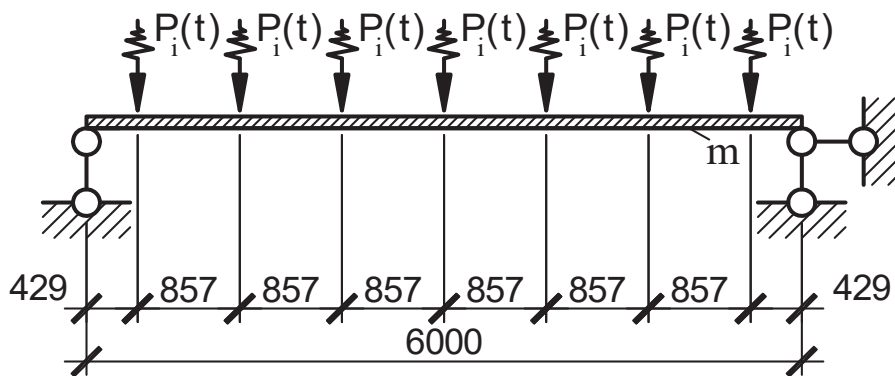


Рис.1. Розрахункова схема балки при розрахунку динамікою в часі

Визначимо параметри вибухової хвилі, для цього попередньо визначимо приведену відстань:

$$Z_1 = \frac{R}{\sqrt[3]{W_1}} = \frac{6}{\sqrt[3]{50}} = 1,629 \text{ кг / м}^{1/3}.$$

Значення імпульсу та часу дії навантаження (прийемо трикутний закон зміни тиску) $i_r = 1,723 \text{ кПа} \cdot \text{с}$; $t_0 = 1,78 \cdot 10^{-3} \text{ с}$.

Визначаємо власну масу перекриття та його частоту власних коливань:

$$q = b \cdot q_v = 2 \cdot 10 = 20 \text{ кН / м}; \quad m = \frac{q}{g} = \frac{20 \cdot 10^3 \text{ Н / м}}{9,81 \text{ м / с}^2} = 2038,74 \text{ кг / м}.$$

$$\omega = \frac{\pi}{2 \cdot L^2} \sqrt{\frac{EI}{m \cdot 0,5}} = \frac{\pi}{2 \cdot 6^2} \sqrt{\frac{176520 \cdot 10^3}{2038,74 \cdot 0,5}} = 18,16 \text{ Гц} =$$

$$= 2 \cdot 3,14 \cdot 12,84 = 114,04 \text{ рад / с}.$$

Визначимо статичне еквівалентне навантаження без врахування коефіцієнту $k(\alpha)$ $P_{es} = i_r \cdot \omega \cdot A = 1,723 \text{ кПа} \cdot \text{с} \cdot 114,04 \cdot 2 \text{ м} \cdot 0,857 \text{ м} = 336,8 \text{ кН}$;

Визначимо значення коефіцієнту $k(\alpha)$

$$k(\alpha) = \frac{2}{\alpha^2} \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha \sin \alpha - 2 \cos \alpha + 2} = 1,19.$$

Відповідно значення статичного еквівалентного навантаження дорівнює

$$P_{es} = i_r \cdot \omega \cdot A \cdot k(\alpha) = 336,8 \cdot 1,19 = 262,064 \text{ кН}.$$

Значення згинаючих моментів для даної балки визначене прямим інтегруванням рівнянь руху (точне значення) складає $M = 2190 \text{ кНм}$. Значення згинаючого моменту визначене імпульсним методом без коригувального коефіцієнту $k(\alpha)$ складає $M_1 = 1804,57 \text{ кНм}$ (похибка 21,35%), з корегувальним коефіцієнтом $M_1 = 1804,57 \text{ кНм}$ (похибка 1,98%). Перевірочні розрахунки показали ефективність використання запропонованого методу.

Висновки і перспективи досліджень. У статті виконано аналітичне узагальнення класичного імпульсного методу розрахунку одномасових систем шляхом урахування впливу відношення тривалості імпульсу t_0 до власного

періоду коливань системи T . Це дозволило розширити область застосування методу від коротких імпульсів до навантажень середньої тривалості. На основі розв'язку рівняння руху системи без демпфування методом Дюамеля для спадного трикутного імпульсу отримано узагальнену формулу для визначення максимальної амплітуди переміщень. Запропоновано коефіцієнт $k(\alpha)$, який враховує динамічну взаємодію системи з навантаженням. Встановлено, що для малих значень $\alpha < 0.5$ метод переходить до класичного імпульсного підходу $F_{qs} = I\omega$, а для $\alpha > 2\pi$ – до квазістатичного режиму, коли дія навантаження еквівалентна повільно змінній силі. Аналітична залежність $k(\alpha)$ дозволяє без виконання чисельного інтегрування оцінювати амплітуду коливань системи для довільних співвідношень t_0/T , що істотно спрощує інженерні розрахунки при моделюванні дії ударних або вибухових навантажень. Отримані результати можуть бути використані як основа для розроблення спрощених методик оцінки реакції елементів будівельних конструкцій при короткочасних динамічних впливах, а також для розширення імпульсного підходу на багатомасові та модальні системи.

1. Clough, R. W., Penzien, J. Dynamics of Structures. – New York: McGraw–Hill, 1993. – 736 p.
2. Boffi, F. Impulse Response of Single Degree of Freedom Systems under Triangular Load Pulse. // Journal of Structural Engineering, ASCE, 1984, Vol. 110(4), pp. 923–940.
3. SOFiSTiK Analysis for Impulsive Loads: User Manual. – Version 2023. – SOFiSTiK AG, 2023.
4. Babaei, H., Maleki, S., & Ahmadi, H. Dynamic Response of Structures Subjected to Triangular and Rectangular Impulsive Loads. // Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2018, Vol. 17(3), pp. 547–556.
5. Zhao, X., Li, Y. Equivalent Single-Degree Models for Structures under Blast and Impact Loads. // Engineering Structures, 2020, Vol. 210, 110 293.