

**ВПЛИВ ЧИСЛА СТУПЕНІВ ВІЛЬНОСТІ НА ВСТАНОВЛЕННЯ
ЧАСТОТ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ПРОГОНОВИХ БУДОВ МОСТІВ**

**INFLUENCE OF DEGREES OF FREEDOM ON THE DETERMINATION
OF NATURAL FREQUENCIES OF BRIDGE STRUCTURES**

**Трач В.М., д.т.н., проф., ORCID: 0000-0001-9500-2743, Хоружий М.М.,
к.т.н., доц., ORCID: 0000-0002-4546-9270, Бореичук Ю.В., студент**
(Національний університет водного господарства та природокористування)

**Trach V.M., DSc (Engin.), Prof., ORCID: 0000-0001-9500-2743, Khoruzhyi
M.M., PhD (Engin.), Assoc. Prof., ORCID: 0000-0002-4546-9270, Boreichuk
Y.V., student (National University of Water and Environmental Engineering)**

У статті розглянуто задачу встановлення частот вільних коливань прогонової будови мостів із застосуванням моделі, що спирається на заміну нескінченного числа ступенів вільності на скінчену їх множину. Метою роботи є оцінка впливу кількості точкових мас, системи із скінченим числом ступенів вільності, на точність визначення частот вільних коливань. Для обґрунтування доцільності застосування такого підходу використано також модальний аналіз у програмному комплексі ЛІРА-САПР.

The paper presents the results of a study of the influence of the number of degrees of freedom on the accuracy of determining the natural frequencies of bridge spans. The problem is related to approximate analytical modelling of the dynamic behaviour of bridge structures, where the continuously distributed mass of the span structure is replaced by a system of concentrated masses. This approach significantly simplifies the mathematical apparatus and allows analytical solutions to be obtained, but it is accompanied by errors, the magnitude of which depends on the number of degrees of freedom of the model. The aim of the study is to quantitatively assess the influence of the number of concentrated masses, which is equivalent to the number of degrees of freedom of the system, on the accuracy of determining the natural frequencies of bridge spans. To achieve this goal, analytical and numerical modelling of the dynamic characteristics of a beam span structure, which is considered as an elastic rod with constant stiffness and uniformly distributed mass, was performed. Within the analytical approach, the solution of the differential equation of beam

vibrations is presented, taking into account the boundary conditions for a hinged bridge structure. Models with different numbers of concentrated masses (from one to three) were constructed, for which the natural frequencies of vibrations were determined. The obtained values are compared with the analytical results for a beam with distributed mass (a system with an infinite number of degrees of freedom). To verify the analytical results, a modal analysis was performed in the LIRA- FEM software package, which implements the finite element method. The analysis showed that when replacing the distributed mass of the system with one or two point masses, the error in the results is approximately 42% and 22%, respectively, compared to a beam with continuous mass. When the number of masses is increased to three, the analytical and numerical results are almost completely consistent.

Ключові слова: динамічний аналіз, прогонова будова, метод скінченних елементів (МСЕ), модальний аналіз, частоти вільних коливань, dynamic analysis, bridge span, finite element method (FEM), modal analysis, natural frequencies.

Вступ. Визначення динамічних характеристик мостових споруд є невід’ємною частиною проєктування, особливо для конструкцій, що зазнають дії транспортних, вітрових або сейсмічних навантажень. При цьому важливим динамічним параметром є тонова частота вільних коливань прогонних будов, оскільки можливе її співпадіння з частотою зовнішньої вимушуючої дії може призвести до явища резонансу.

Аналітичне визначення частот вільних коливань виконується, як правило, за спрощеними схемами [2-5], у яких розподілена за довжиною маса прогонової будови мосту, яка є системою з нескінченим числом ступенів вільності, замінюється, наприклад, точковими масами, перетворюючись у конструкцію з їх скінченим числом ступенів вільності. Це дає змогу спростити складність розв’язання рівнянь руху, але отримати лише наближені розв’язки. Однак такий підхід ініціює виникнення питання стосовно відповідності наближеного розв’язку точному, який отримано для прогонової будови із розподіленою за довжиною масою. Збільшення кількості точкових мас теоретично може призвести наближений розв’язок рівнянь руху до точного, проте суттєво ускладнить аналітичні обчислення. Тому актуальною є задача встановлення такої кількості ступенів вільності прогонової будови, за якої результати аналітичного розрахунку частот вільних коливань збігаються з точними або також такими, що отримані при використанні чисельних підходів.

Аналіз останніх досліджень. Питання визначення частот власних коливань прогонових будов мостових конструкцій розглядалися у працях

багатьох вітчизняних та зарубіжних дослідників. Класичні підходи до розрахунку коливань пружних систем викладено в роботах [1, 2], де наведено аналітичні розв'язки для балок із розподіленою масою та описано вплив гнучкості зсуву. Основи динамічних розрахунків стержневих систем також представлено в навчальній літературі [3, 4, 5] та ін.

Методи чисельного визначення власних частот, зокрема із застосуванням скінченноелементного аналізу, представлені у статтях [6, 7], який продемонстрував можливості ПК ЛІРА-САПР для модального аналізу інженерних споруд.

Попри значну кількість робіт, залишається актуальною проблема оцінки використання аналітичних моделей зі зосередженими масами на точність встановлення частот вільних коливань. Зокрема, бракує узагальнених результатів щодо кількісної оцінки збіжності аналітичних і чисельних методів при різній кількості ступенів вільності моделі прогонової будови мосту.

Постановка мети і задач досліджень. Мета роботи полягає у визначенні впливу кількості ступенів вільності на точність обчислення частот власних коливань прогонних будов мостів.

Для досягнення мети поставлено такі завдання:

1. Побудувати аналітичну модель прогонної будови у вигляді балки на двох опорах із заданими характеристиками.
2. Виконати аналітичне визначення частот вільних коливань для різної кількості ступенів вільності.
3. Провести порівняння результатів з модальним аналізом, виконаним у ПК ЛІРА-САПР.
4. Встановити кількість ступенів вільності, при якій розбіжність аналітичних і чисельних результатів розрахунків, стосовно частот вільних коливань, не перевищує допустимої похибки.

Методика досліджень. Реалізація задачі про вимушені коливання споруд, що виготовлені із прямолінійних стержнів (прогонових будов), призводить до необхідності розв'язання для кожного згинального елемента диференціального рівняння [4]

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c(x, t) = q(x, t). \quad (1)$$

В (1) μ і I – відповідно змінна за довжиною лінійна щільність і момент інерції поперечного перерізу стержня; $q(x, t)$ – змінне в часі та довжиною навантаження; $y(x, t)$ – переміщення (прогини) осі стержня, що змінюється за довжиною та часом; c – характеристика, що впливає на затухання коливань.

Прийнявши, що EI і μ є сталими за довжиною стержня рівняння (1) набуває такого вигляду

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\mu}{EI} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{c(x,t)}{EI} = \frac{q(x,t)}{EI}. \quad (2)$$

У випадку вільних коливань рівняння (2) є таким

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\mu}{EI} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{c(x,t)}{EI} = 0. \quad (3)$$

Його розв'язання приведемо у вигляді

$$y(x,t) = y(x) \cdot \sin(\omega t + \lambda). \quad (4)$$

Похідні за змінними x і t

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} (\sin(\omega t + \lambda)), \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = y(x)(-\omega^2) \sin(\omega t + \lambda). \quad (6)$$

Підставляючи (5) і (6) в (3) та нехтуючи в ньому останнім доданком, що впливає на затухання коливань, і після скорочення на $\sin(\omega t + \lambda)$ отримуємо рівняння

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \kappa^4 y = 0. \quad (7)$$

Рівняння (7) описує вільні незатухаючі коливання стержня з розподіленою за довжиною масою μ . Також в ньому введені позначення

$$\kappa^4 = \mu \omega^2 / EI, \quad (8)$$

де ω – частота вільних коливань стержня.

Скористаємось підстановкою Ейлера виду

$$y = e^{yx} \quad (9)$$

для розв'язку рівняння (7) і після чого маємо таке характеристичне рівняння

$$y^4 - k^4 = 0. \quad (10)$$

Рівняння (10) має такі корені

$$\varphi_1 = k, \varphi_2 = -k, \varphi_3 = ik, \varphi_4 = -ik. \quad (11)$$

Зважаючи на (11), можемо записати розв'язок однорідного диференціального рівняння (7)

$$y(x) = c_1 \operatorname{ch} kx + c_2 \operatorname{sh} kx + c_3 \cos kx + c_4 \sin kx, \quad (12)$$

де c_i для $i = \overline{1,4}$ сталі інтегрування, які можуть бути встановлені при урахуванні граничних умов на кінцях стержня.

Результати досліджень. Розглядається шарнірно опертий стержень

поперечний переріз якого, а отже і його маса, не змінюються за довжиною (рис. 1): $EI=const, \mu=const$.

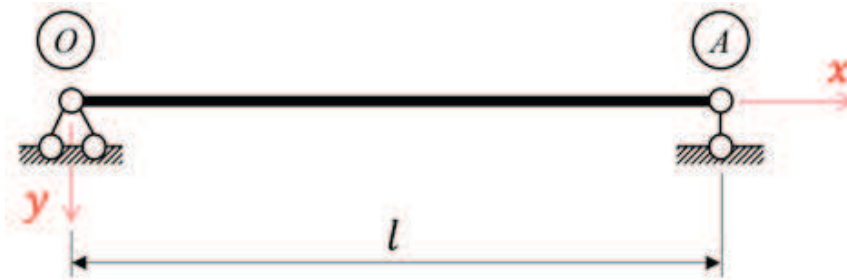


Рис. 1. Розрахункова схема стержня (прогонової будови)

Знайдемо сталі інтегрування. Отже при

$$x = 0 : y_{(x=0)} = 0 \text{ і } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 .$$

Скористаємось розв'язком (12)

$$0 = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 1 + c_4 \cdot 0 . \quad (\text{а})$$

Звідки

$$c_1 = -c_3 \text{ або } c_1 + c_3 = 0 . \quad (\text{б})$$

Друга похідна від залежності (12) така

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = c_1 k^2 \text{ch } kx + c_2 k^2 \text{sh } kx - c_3 k^2 \cos kx + c_4 k^2 \sin kx . \quad (\text{в})$$

Після прирівнюванні (в) до нуля, згідно з граничними умовами, маємо, що

$$c_1 - c_3 = 0 . \quad (\text{г})$$

Для знаходження сталих c_1 і c_3 скористаємось системою рівнянь

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 0; \\ c_1 - c_3 = 0. \end{cases} \quad (\text{д})$$

Вона є однорідною, тому

$$c_1 = c_3 = 0 . \quad (\text{ж})$$

Для знаходження сталих c_2 і c_4 скористаємось правими граничними умовами. Як видно з рис.1

$$\text{при } x = l : y_{(x=L)} = 0 \text{ і } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 . \quad (\text{з})$$

Рівняння (12) з урахуванням (ж) має такий вигляд

$$y(x) = c_2 \text{sh } kx + c_4 \sin kx , \quad (\text{е})$$

а друга похідна

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = c_2 k^2 \operatorname{sh} kx - c_4 k^2 \sin kx. \quad (\epsilon)$$

При урахуванні граничних умов (з) рівняння (е) і (є) утворюють таку систему рівнянь

$$\begin{cases} c_2 \operatorname{sh} kl + c_4 \sin kl = 0; \\ c_2 k^2 \operatorname{sh} kl - c_4 k^2 \sin kl = 0. \end{cases} \quad (\text{і})$$

Визначник системи (і) має такий вигляд

$$2 \cdot c_2 \cdot c_4 \cdot \operatorname{sh} kl \cdot \sin kl \cdot k^2 = 0. \quad (\text{й})$$

Виконаємо аналіз отриманого рівняння. Очевидно, що $k^2 \neq 0$, так як $k \neq 0$ (з (8) при $k=0$ частота вільних коливань $\omega=0$, а це є свідченням того, що маємо вихідний рівноважний стан і коливання відсутні). Функція $\operatorname{sh} kl=0$ лише у випадку, коли $k=0$. Це знову відповідає вихідному рівноважному стану. Тоді $\operatorname{sh} kl \neq 0$. Залишається лише

$$\sin kl = 0. \quad (\text{к})$$

Ця умова виконується лише тоді, коли

$$kl = n\pi \quad \text{для } n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{м})$$

Звідки

$$k = n\pi/l \quad \text{для } n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{н})$$

Після підстановки (8) у (н) маємо таке рівняння для частоти вільних незатухаючих коливань стержня з розподіленою масою

$$\omega = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{о})$$

При цьому слід зауважити, що $c_2 \cdot c_4 \neq 0$ так як досліджуються стани коливань.

Очевидно, що при $n=1$ маємо першу частоту вільних коливань

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}, \quad (\text{п})$$

При $n=2$ – другу

$$\omega_2 = \frac{4\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}, \quad (\text{р})$$

А при $n=3$ – третю

$$\omega_3 = \frac{9\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}, \quad (\text{с})$$

І так далі. Можемо зробити висновок, що частоти вільних незатухаючих коливань є прямо пропорційними квадратам їх номерів n .

Як відомо, кожній частоті вільних коливань відповідає своя форма коливань (рис.2)

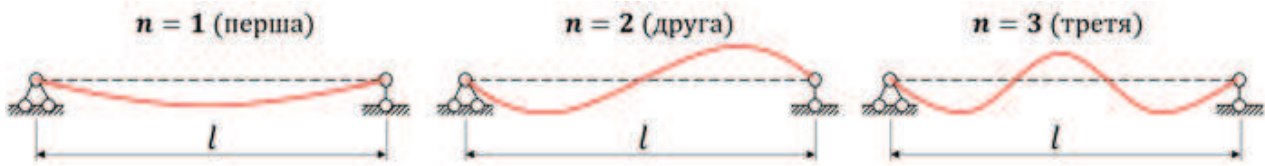


Рис. 2. Форми вільних коливань

Залежності для частот вільних коливань (p), (ω), (σ) отримані для балки з розподіленою масою або ж для стержня з нескінченим числом ступенів вільності. Як було сказано вище, в практиці динамічного аналізу застосовуються моделі із скінченим числом ступенів вільності. Характерним для яких є заміна розподілених мас точковими. Таке представлення мас дозволяє суттєво спростити розрахунки, однак породжує певну похибку. З метою оцінки цієї похибки аналітичним шляхом визначені частоти вільних коливань стержнів із різною кількістю зосереджених мас. У розрахунках розглядався стержень довжиною $l=1$ м, жорсткістю $EI=1$ кН·м² із k зосередженими масами $m_i=m/k$, що розміщені на рівних відстанях (рис. 3).

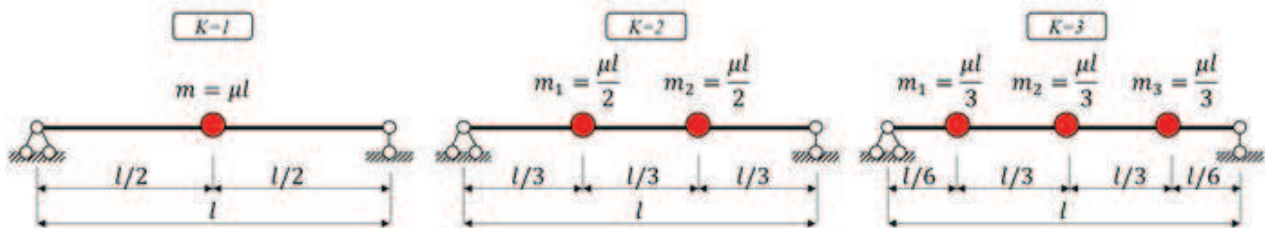


Рис. 3. Варіанти стержнів відповідно з 1-им, 2-а й 3-а ступенями вільності

При використанні підходів, що представлені в [5], були проведені аналітичні розрахунки стосовно встановлення частот вільних коливань стержня з одним, двома та трьома ступенями вільності (рис. 3). За їх результатами були встановлені, без урахування характеристики затухання, частоти вільних коливань (табл. 1) і побудовані відповідні їм форми. Отримані результати динамічного розрахунку було співставлено з такими, що проведені для стержня з нескінченим числом ступенів вільності. Повний збіг частот вільних коливань і відповідних форм спостерігається для стержня з трьома ступенями вільності.

Для співставлення результатів аналітичних розрахунків також виконане чисельне моделювання в програмному комплексі ЛІРА-САПР, що реалізує метод скінченних елементів (МСЕ) [8]. Моделі прогонових будов побудовано за використання стержневих скінченних елементів з геометричними та фізико-механічними параметрами, що відповідають аналітичній схемі (рис. 4).

Навантаження задавалося шляхом прикладання ваги зосередженої маси $F=m_i g$ у вузли скінченноелементної (СЕ) моделі.

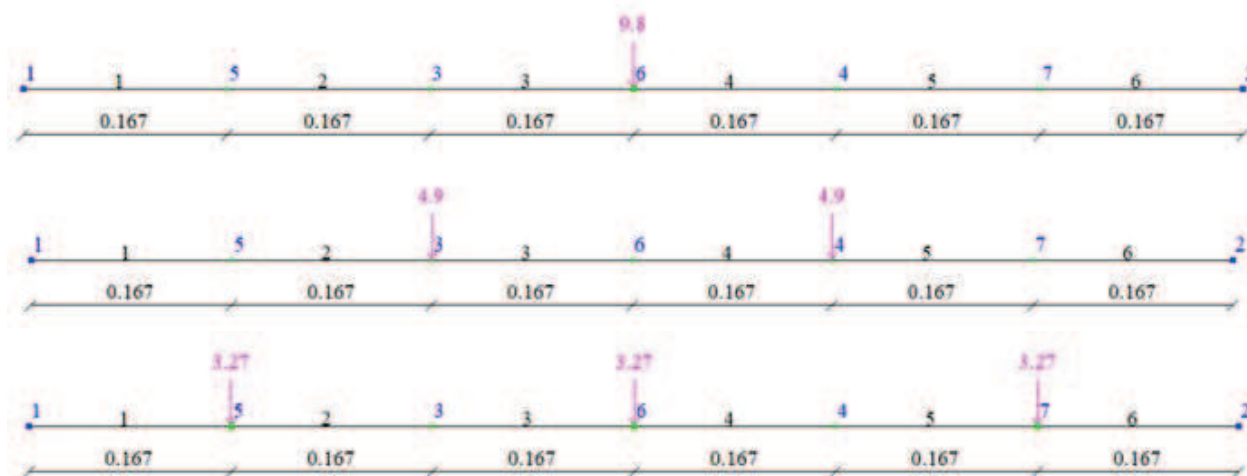


Рис. 4. СЕ моделі стержня для $k=1$, $k=2$, $k=3$ відповідно

У таблиці 1 наведено порівняння результатів аналітичного та чисельного розрахунків. Порівняння виконано відповідно для стержнів з 1-им, 2-м та 3-м ступенями вільності.

Таблиця 1

Результати розрахунку вільних коливань балки

k	Частота вільних коливань ω , рад/с				
	Для стержня з нескінченим числом ступенів вільності		Для стержня із скінченим числом ступенів вільності		$\Delta, \%$
	Аналітичний розрахунок	Чисельний розрахунок	Аналітичний розрахунок	Чисельний розрахунок	
1	9,86	9,86	6,93	6,93	42
2			8,05	8,05	22
3			9,86	9,86	0

Висновки та рекомендації. Заміна розподіленої, за довжиною прогонової будови мосту, маси на систему з точкових мас дозволяє для відповідної їх кількості здійснювати оцінку частот вільних коливань із прийнятною точністю. Отримані результати свідчать, що для кількості зосереджених мас $k=1$, $k=2$ частоти значно відрізняються від таких, що отримані для прогонової будови з розподіленою масою (42% і 22% відповідно). Проте, зі збільшенням кількості мас до трьох спостерігається абсолютна збіжність таких результатів. Це підтверджується також чисельними даними з модального аналізу в ПК ЛІРА-САПР.

Отримані результати можуть бути використані для уточнення спрощених методик динамічного розрахунку прогонових будов мостів на етапі попереднього проектування.

1. Weaver W. Jr., Timoshenko S. P., Young D. H. Vibration problems in engineering. 5th ed. Chichester: John Wiley & Sons Limited, 1990. 610 p. ISBN 0-471-63228-7.
2. Clough R. W., Penzien J. Dynamics of structures. New York: McGraw-Hill, 1975. 634 p.
3. Баженов В. А., Ворона Ю. В. Будівельна механіка. Динаміка. Підручник. К.: Каравела, 2014. 287 с.
Bazhenov V. A., Vorona Yu. V. Budivselna mekhanika. Dynamika. Pidruchnyk. K.: Karavela, 2014. 287 s
4. Кисельов В. А. Будівельна механіка: спеціальний курс. Підручник. 1980. 616 с.
Kyselov V. A. Budivselna mekhanika: spetsialnyi kurs. Pidruchnyk. 1980. 616 s.
5. Дорошук Г. П., Трач В. М. Будівельна механіка з елементами інформаційних технологій: Підручник. Рівне: НУВГП, 2005. -566 с. ISBN 5-7763-0162-9.
Doroshuk H. P., Trach V. M. Budivselna mekhanika z elementamy informatsiinykh tekhnolohii: Pidruchnyk. Rivne: NUVHP, 2005. -566 s. ISBN 5-7763-0162-9.
6. В. М. Трач, М. М. Хоружий. Власні коливання балкових конструкцій мостових споруд. Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. Збірник наукових праць. 2023. 44, С.214-221.
V. M. Trach, M. M. Khoruzhyi. Vlasni kolyvannia balkovykh konstrukttsii mostovykh sporud. Resursoekonomni materialy, konstrukttsii, budivli ta sporudy. Zbirnyk naukovykh prats. 2023. 44, S.214-221
7. В. М. Трач, М. М. Хоружий, Ю. В. Бореичук. Вплив типу скінченних елементів на результати динамічного аналізу мостового прогону. Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. Збірник наукових праць. 2025. Вип. 47, С.409-417.
V. M. Trach, M. M. Khoruzhyi, Yu. V. Boreichuk. Vplyv typu skinchennykh elementiv na rezultaty dynamichnoho analizu mostovoho prohonu. Resursoekonomni materialy, konstrukttsii, budivli ta sporudy. Zbirnyk naukovykh prats. 2025. Vyp. 47, S.409-417.
8. Програмний комплекс ЛІРА-САПР. Приклади розрахунку і проектування. К.: LIRALAND, 2023. 635 с. URL: https://lira.land/public_private/lira/2023/lira_sapr_examples_ua.pdf
Prohramnyi kompleks LIRA-SAPR. Pryklady rozrakhunku i proektuvannia. K.: LIRALAND, 2023. 635 s. URL: https://lira.land/public_private/lira/2023/lira_sapr_examples_ua.pdf