

ВИКОРИСТАННЯ ТРИВИМІРНОГО ТА СКІНЧЕНОЕЛЕМЕНТНОГО ПІДХОДІВ ЩОДО ВСТАНОВЛЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ТУНЕЛЬНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОПРАВ

APPLICATION OF THREE-DIMENSIONAL AND FINITE ELEMENT METHODS FOR DETERMINING THE STRESS STATE OF CYLINDRICAL TUNNEL LININGS

Трач В.М., д.т.н., професор, ORCID: 0000-0001-9500-2743, Подворний А.В. д.т.н., професор, ORCID ID: 0000-0001-8518-4395, Літницький В. І., аспірант, ORCID ID: 0009-0004-1656-9776, (Національний університет водного господарства та природокористування)

Trach V.M. doctor of technical sciences, professor, ORCID ID: 0000-0001-9500-2743, Podvornyi A.V. doctor of technical sciences, professor, ORCID ID: 0000-0001-8518-4395, Litnitskyi V. I., ORCID ID: 0009-0004-1656-9776, (National university of water management and nature resources use, Rivne)

В статті, при використанні тривимірного чисельно-аналітичного та скінченно-елементного підходів, представлено розв'язання науково-технічної проблеми щодо розрахунку параметрів напруженого стану тунельних циліндричних оправ. Приведено порівняльний аналіз отриманих результатів стосовно оцінки напружених станів тунельних конструкцій з залізобетону та при використанні підсилюючого його шару з волокнистого композиту.

The proposed work presents an approach to solving an important scientific and technical problem of calculating the lining of a tunnel structure under distributed external pressure. To solve this task, relations from the three-dimensional elasticity theory for cylindrical shell structures were applied, as well as the LIRA-SAPR 2024 software package (licensed version).

The three-dimensional equilibrium equations were derived by modifying the Hu–Washizu variational principle. The dimensionality reduction of the resulting system was carried out using the analytical Bubnov–Galerkin method under specified boundary conditions at the edges and surfaces of the shell structure, by expanding the system's stress and displacement parameters into double trigonometric series. The resulting one-dimensional system of twelfth-order ordinary differential equations was solved using the numerical method of discrete orthogonalization in the radial direction.

For solving the problem with the finite element method (FEM) using the LIRA-SAPR 2024 software package, the *Surface of rotation – Cylinder* function

was applied, with element type – plates, and grid type – rectangular. The following finite elements were used: type 41 – universal rectangular shell FEM, and type 45 – universal rectangular thick shell FEM.

By applying the proposed approaches, specific parameters of the stress–strain state of a monolithic reinforced concrete shell structure, as well as of a reinforced concrete structure with an internal strengthening layer of fiber composite – boroplastic, were determined and compared.

From the analysis of the obtained results, conclusions can be drawn regarding the applicability of the outcomes obtained with the finite element approach in comparison with those derived from the spatial approach.

Ключові слова:

циліндрична оболонка, напружено-деформований стан, анізотропія, тунельна конструкція, волокнистий композит,
cylindrical shell, stress-strain state, anisotropy, tunnel structure, fiber composite.

Вступ. Аналіз останніх досліджень. У практиці сучасного інженерного будівництва систем транспортної, комунікаційної інфраструктури тунельні споруди займають важливе місце. Інтенсивний розвиток мегаполісів, необхідність оптимального використання підземного простору, а також зростання технічних вимог до надійності й довговічності підземних об'єктів зумовлюють підвищений інтерес до вдосконалення методів проектування їх конструктивних елементів. Одними з ключових частин багатьох тунельних споруд є оправи, розрахункова схема яких може бути представлена циліндричними оболонками, які, як правило, сприймають значні навантаження від оточуючої породи, гідростатичного тиску тощо.

Розрахунок циліндричних оправ може бути здійснений при використанні підходів, що спираються на теорію оболонок [1-3], яка дозволяє отримати точні або наближені розв'язки при використанні відповідних схем навантаження та геометрії. Однак, такі підходи обмежені у застосуванні до реальних задач, що зазвичай супроводжуються анізотропією матеріалу, зміною товщини, різноманітними включеннями в оправи та ін.

Чисельний метод скінченних елементів (МСЕ) [4, 5] завдяки універсальним можливостям, набув широкого застосування в інженерній практиці розрахунків елементів конструкцій, будівель чи споруд. Він дозволяє моделювати реальні умови експлуатації конструкцій з урахуванням складної геометрії, різноманітних граничних умов і навантажень. Водночас МСЕ, для забезпечення достовірності отриманих результатів, потребує ретельної верифікації та порівняння з аналітичними розв'язками або експериментальними даними.

Мета дослідження. Метою даної роботи є порівняльний аналіз результатів чисельного (скінченноелементного) та чисельно-аналітичного методів розрахунку напружено-деформованого стану анізотропних циліндричних

оправ, що використовуються в тунельних конструкціях. Анізотропія матеріалу оболонок пов'язана із використанням волокнистих композитів для підсилення залізобетонної циліндричної оправи тунелю. При укладанні підсилюючого шару на циліндричну конструкцію виникає розбіжність між головними напрямками пружності волокнистого матеріалу та осями криволінійної системи координат оболонок. Відповідно такий матеріал у власних осях оболонки необхідно розглядати як такий, який має одну площину пружної симетрії паралельну серединній поверхні оболонок.

В якості чисельного підходу до розв'язку задачі використаний програмний комплекс ЛПА-САПР 2024 [6]. Розрахунок оправи реалізовується чисельним методом скінчених елементів (МСЕ). Здобуті таким чином результати були співставленні із отриманими при використанні тривимірних співвідношень теорії пружності анізотропного порожнистого тіла.

Постановка задачі та методика розв'язку. Рівняння рівноваги, співвідношення пружності та граничні умови згідно до варіаційного принципу Ху – Васідзу [7] можливо вивести з умови стаціонарності функціоналу Π_1 , який визначається з інтегралу:

$$\begin{aligned} \Pi_1 = & \iiint_V \left\{ W(e_{ij}) + \Phi(u_i) - \sigma_{ij} \left[e_{ij} - \frac{1}{2} \times (u_{i,j} + u_{j,i}) \right] \right\} dV + \\ & + \iint_{S_1} \Psi(u_i) dS - \iint_{S_2} p_i (u_i - \bar{u}_i) dS. \end{aligned} \quad (1)$$

В виразі (1) варіюються деформації e_{ij} , напруження σ_{ij} , а також переміщення u_i і напруження p_i на поверхні S_2 викликані переміщеннями $\bar{u}_i$. Також в цьому функціоналі $W(e_{ij})$ – потенціальна енергія деформації, $\Phi(u_i)$, $\Psi(u_i)$ – потенціали об'ємних і поверхневих навантажень.

Використовуючи представлений в [2, 3] підхід, використовуючи умову стаціонарності варіації функціоналу (1), здобудемо тривимірну систему з шести диференціальних рівнянь рівноваги для шаруватих циліндричних анізотропних оболонок в частинних похідних:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial r} = & -\frac{c_{23}^i + 1}{r} \sigma_{rr}^i - \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}^i}{\partial \theta} + \frac{c_{22}^i}{r^2} u_r^i + \frac{c_{12}^i}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial z} + \frac{c_{26}^i}{r^2} \frac{\partial u_z^i}{\partial \theta} + \\ & + \frac{c_{26}^i}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} + \frac{c_{22}^i}{r^2} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial \theta}; \\ \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial r} = & c_{13}^i \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial z} - \frac{1}{r} \tau_{rz}^i - \frac{c_{12}^i}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial z} - c_{11}^i \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z^2} - \frac{c_{66}^i}{r^2} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial \theta^2} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{c_{12}^i + c_{66}^i}{r} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z \partial \theta} + \frac{c_{36}^i}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial \theta} - \frac{c_{26}^i}{r^2} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} - \frac{2c_{16}^i}{r} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z \partial \theta} - c_{16}^i \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z^2} - \\
& - \frac{c_{26}^i}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial \theta^2}; \\
& \frac{\partial \tau_{r\theta}^i}{\partial r} = \frac{c_{23}^i}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \tau_{r\theta}^i - \frac{c_{22}^i}{r^2} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} - \frac{c_{12}^i + c_{66}^i}{r} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z \partial \theta} - c_{66}^i \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z^2} - \\
& - \frac{c_{22}^i}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial \theta^2} + c_{36}^i \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial z} - \frac{c_{26}^i}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial z} - c_{16}^i \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z^2} - \frac{c_{26}^i}{r^2} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial \theta^2} - \\
& - \frac{2c_{26}^i}{r} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z \partial \theta}; \\
& \frac{\partial u_r^i}{\partial r} = c_{33}^i \sigma_{rr}^i + \frac{c_{23}^i}{r} u_r^i + c_{13}^i \frac{\partial u_z^i}{\partial z} + \frac{c_{36}^i}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial \theta} + c_{36}^i \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} + \frac{c_{23}^i}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial \theta}; \\
& \frac{\partial u_z^i}{\partial r} = a_{55}^i \tau_{rz}^i + a_{45}^i \tau_{r\theta}^i - \frac{\partial u_r^i}{\partial z}; \\
& \frac{\partial u_\theta^i}{\partial r} = a_{45}^i \tau_{rz}^i + a_{44}^i \tau_{r\theta}^i - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_\theta^i. \tag{2}
\end{aligned}$$

Тут r – радіальна координата, яка не залежить від координат z та θ ; σ_{rr}^i , τ_{rz}^i , $\tau_{r\theta}^i$, – компоненти напружень; u_z^i , u_θ^i , u_r^i – переміщення кожного i -го шару оболонки згідно напрямків осей z , θ , r . Сталі c_{kl}^i ($k, l=1, 2, 3, 6$) – це характеристики матеріалу i -го шару оболонки, що пов'язують напруження та деформації відповідно до узагальненого закону Гука:

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz}^i &= c_{11}^i e_{zz}^i + c_{12}^i e_{\theta\theta}^i + c_{16}^i e_{z\theta}^i - c_{13}^i \sigma_{rr}^i; \\
\sigma_{\theta\theta}^i &= c_{12}^i e_{zz}^i + c_{22}^i e_{\theta\theta}^i + c_{26}^i e_{z\theta}^i - c_{23}^i \sigma_{rr}^i; \\
\tau_{z\theta}^i &= c_{16}^i e_{zz}^i + c_{26}^i e_{\theta\theta}^i + c_{66}^i e_{z\theta}^i - c_{36}^i \sigma_{rr}^i; \\
e_{rr}^i &= c_{13}^i e_{zz}^i + c_{23}^i e_{\theta\theta}^i + c_{36}^i e_{z\theta}^i + c_{33}^i \sigma_{rr}^i; \\
e_{rz}^i &= a_{45}^i \tau_{r\theta}^i + a_{55}^i \tau_{rz}^i; \quad e_{r\theta}^i = a_{44}^i \tau_{r\theta}^i + a_{45}^i \tau_{rz}^i \tag{3}
\end{aligned}$$

і визначаються з використанням механічних констант a_{kl}^i [8] матеріалу оболонки згідно до виразів:

$$\begin{aligned}
c_{11}^i &= \frac{1}{|A_{22}^i|} (a_{22}^i a_{66}^i - a_{26}^{i2}); & c_{12}^i &= \frac{1}{|A_{22}^i|} (a_{16}^i a_{26}^i - a_{12}^i a_{66}^i); \\
c_{22}^i &= \frac{1}{|A_{22}^i|} (a_{11}^i a_{66}^i - a_{16}^{i2}); & c_{16}^i &= \frac{1}{|A_{22}^i|} (a_{12}^i a_{26}^i - a_{22}^i a_{16}^i); \\
c_{26}^i &= \frac{1}{|A_{22}^i|} (a_{12}^i a_{16}^i - a_{11}^i a_{26}^i); & c_{66}^i &= \frac{1}{|A_{22}^i|} (a_{11}^i a_{22}^i - a_{12}^{i2}); \\
|A_{22}^i| &= a_{66}^i (a_{11}^i a_{22}^i - a_{12}^{i2}) + a_{26}^i (a_{12}^i a_{16}^i - a_{11}^i a_{26}^i) + a_{16}^i (a_{12}^i a_{26}^i - a_{22}^i a_{16}^i) \\
c_{13}^i &= a_{13}^i c_{11}^i + a_{23}^i c_{12}^i + a_{36}^i c_{16}^i; & c_{23}^i &= a_{13}^i c_{12}^i + a_{23}^i c_{22}^i + a_{36}^i c_{26}^i; \\
c_{36}^i &= a_{13}^i c_{16}^i + a_{23}^i c_{26}^i + a_{36}^i c_{66}^i; & c_{33}^i &= a_{33}^i - (a_{13}^i c_{13}^i + a_{23}^i c_{23}^i + a_{36}^i c_{36}^i). \quad (4)
\end{aligned}$$

Розв'язання системи (2) повинно відповідати умовам на поверхнях оболонки:

при $r = r_1$

$$\sigma_{rr}^0(r_1, z, \theta) = \pm q_r^0(z); \quad \tau_{rz}^0(r_1, z, \theta) = \pm q_z^0(z); \quad \tau_{r\theta}^0(r_1, z, \theta) = \pm q_\theta^0(z);$$

і $r = r_2$

$$\sigma_{rr}^n(r_2, z, \theta) = \pm q_r^n(z); \quad \tau_{rz}^n(r_2, z, \theta) = \pm q_z^n(z); \quad \tau_{r\theta}^n(r_2, z, \theta) = \pm q_\theta^n(z). \quad (5)$$

Умовам на торцях оболонки при $z = 0$, $z = L$, наприклад

$$\sigma_{zz} = u_r = u_\theta. \quad (6)$$

Умовам жорсткого контакту шарів для напружень та переміщень:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^i(r_i) &= \sigma_{rr}^{i+1}(r_i); & \tau_{rz}^i(r_i) &= \tau_{rz}^{i+1}(r_i); & \tau_{r\theta}^i(r_i) &= \tau_{r\theta}^{i+1}(r_i); \\
u_r^i(r_i) &= u_r^{i+1}(r_i); & u_z^i(r_i) &= u_z^{i+1}(r_i); & u_\theta^i(r_i) &= u_\theta^{i+1}(r_i). \quad (7)
\end{aligned}$$

Тут i – номер шару оболонки.

Для зменшення розмірності тривимірної системи рівнянь рівноваги (2) скористаємось процедурою аналітичного методу Бубнова – Гальоркіна. Розкладемо функції, що описують напруження та деформації (2) в тригонометричні ряди так, щоб уздовж твірної z задовольнялись умови (6), а також врахуємо періодичність параметрів в коловому напрямку θ :

$$\sigma_{rr}(r, z, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{1,pk}(r) \cos k\theta + y_{1,mk}'(r) \sin k\theta \right] \sin l_m z;$$

$$\begin{aligned}
\tau_{rz}(r, z, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{2,pk}(r) \cos k\theta + y_{2,mk}'(r) \sin k\theta \right] \cos l_m z; \\
\tau_{r\theta}(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{3,pk}(r) \sin k\theta + y_{3,mk}'(r) \cos k\theta \right] \sin l_m z; \\
u_r(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{4,pk}(r) \cos k\theta + y_{4,mk}'(r) \sin k\theta \right] \sin l_m z; \\
u_z(r, z, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{5,pk}(r) \cos k\theta + y_{5,mk}'(r) \sin k\theta \right] \cos l_m z; \\
u_{\theta}(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{6,pk}(r) \sin k\theta + y_{6,mk}'(r) \cos k\theta \right] \sin l_m z. \quad (8)
\end{aligned}$$

В (8) $y_{i,pk}$, $y_{i,mk}'$ ($i=1\div 6$) – складові компонент напружень σ_{rr} , τ_{rz} , $\tau_{r\theta}$ та переміщень u_r , u_z , u_{θ} , що розкладені за тригонометричними рядами Фур'є, p, m, k – хвильові числа в рядах. Параметр $l_m = m\pi/L$, де L – довжина твірної циліндричної оболонки.

Після розділення змінних в рівняннях (2) за використанням залежностей (8) отримаємо одновимірну систему звичайних диференціальних рівнянь рівноваги дванадцятого порядку для циліндричної оболонки в нормальній формі Коші:

$$\frac{d\bar{y}^i}{dr} = T^i(r) \bar{y}^i, \quad T^i(r) = t_{n,l}^i(r); \quad (n, l = \overline{1,12}), \quad (9)$$

де

$$\bar{y}^i = \left\{ y_{1,p}^i; y_{2,p}^i; y_{3,p}^i; y_{4,p}^i; y_{5,p}^i; y_{6,p}^i; y_{1,m}^{i/}; y_{2,m}^{i/}; y_{3,m}^{i/}; y_{4,m}^{i/}; \right.$$

$$\left. y_{5,m}^{i/}; y_{6,m}^{i/} \right\} - \text{розв'язуюча вектор-функція, а } T^i(r) - \text{квадратна матриця із}$$

змінними коефіцієнтами, що залежить від аргумента r .

Розв'язок системи рівнянь напружено-деформованого стану (9) для граничних умов (5) проводиться з використанням чисельного методу дискретної ортогоналізації.

Розрахунок циліндричної оправи чисельним методом реалізовується програмним комплексом ЛПРА-САПР 2024. Для розв'язання задачі використовується функція Поверхні обертання - Циліндр. Геометрична схема циліндричної оболонки створюється так: тип елементів – пластини, тип решітки – прямокутна. Поверхня розбивається на скінчені елементи за довжиною та колом. Застосовуються такі скінчені елементи (СЕ): тип 41 –

універсальний прямокутний СЕ оболонки та тип 45 – універсальний прямокутний СЕ товстої оболонки.

Для опису матеріалу задаються приведені фізико-механічні характеристики (модуль пружності, модуль зсуву, коефіцієнт Пуассона). На торцях циліндричної оболонки встановлюються граничні умови типу (6).

Розподілене стискаюче навантаження прикладене до зовнішньої поверхні оболонки. Його величина змінюється за синусоїдальним законом уздовж твірної та є сталою за коловим напрямком. Навантаження задається дискретно для кожного СЕ, використовуючи локальну систему координат. Навантаження, що діє на окремий скінченний елемент, є трапецієвидним.

Розрахункова схема циліндричної оправи представлена на рис. 1.

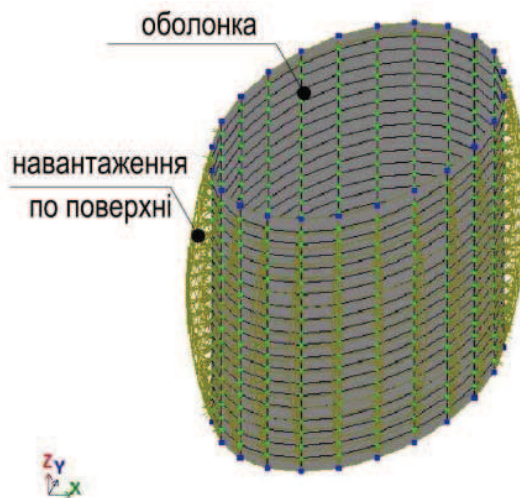


Рис. 1. Розрахункова схема циліндричної оправи в програмному середовищі ЛІРА-САПР 2024

Реалізація пропонуваної методики щодо встановлення параметрів напруженого стану циліндричної оправи тунелю. Для представлення можливостей запропонованих в роботі підходів та порівняння їх результатів було вибрано об'єкт дослідження – колова циліндрична оправа тунельної споруди. Розглянуто два варіанти такої конструкції: одношарова залізобетонна та двошарова, що підсилена волокнистим композитом боропластиком. Головні напрямки пружності композиту можуть бути повернуті на кут ψ відносно твірної циліндричної оправи: $\psi=0^0; 30^0; 60^0; 90^0$.

Механічні характеристики матеріалів, що використовувались при проведенні розрахунків, такі: залізобетон – $E_{eq}=4,16E_0$, $\nu_{eq}=0,205$; боропластик – $E_{11}=280E_0$, $E_{22}=E_{33}=31E_0$, $G_{12}=G_{23}=10,5E_0$, $G_{13}=21,2E_0$, $\nu_{21}=0,25$, $\nu_{12}=0,0277$, $E_0=10000\text{МПа}$.

Геометричні розміри конструкції такі: радіус внутрішньої бокової поверхні $r_1=3,1$ м, зовнішньої – $r_2=3,4$ м, а довжина $L=6,0$ м. У випадку двошарової конструкції геометричні характеристики за товщиною такі: залізобетонний шар $r_{1s}=3,11$ м; $r_{2s}=3,4$ м, шар боропластику: $r_{1b}=3,1$ м; $r_{2b}=3,11$ м, а довжина L

така ж. Навантаження прикладене до зовнішньої бічної поверхні оправи

$$q = -q_0 \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right), \text{ де } q_0 = 1 \text{ МПа.}$$

Результати проведених за пропонованими підходами досліджень представлені в табл. 1 та на рис. 2. В табл. 1 порівнюється $\sigma_{\theta\theta}$ – напруження у коловому напрямку оправи, на рівні зовнішньої, серединної та внутрішньої поверхонь, обчислених при використанні залежностей узагальненого закону Гука (3). На рис. 2 представлені результати визначення $\sigma_{\theta\theta}$ для двошарової оболонки, коли головні напрямки пружності шару боропластику повертаються відносно твірної оболонки на кут ψ . Позначення графіків на рис. 2 таке: криві 1 та 3 відповідають результатам визначення напружень $\sigma_{\theta\theta}$ на відповідно зовнішній та внутрішній поверхнях оболонкової конструкції отриманим згідно чисельно-аналітичного підходу. Криві 2 та 4 також характеризують $\sigma_{\theta\theta}$ на зовнішній та внутрішній поверхнях, але результати здобуто за використанням чисельного методу скінченних елементів.

Таблиця 1

Значення параметрів напруженого стану $\sigma_{\theta\theta}$ для одношарової оправи

Поверхні оболонки		$\sigma_{\theta\theta}$ (МПа)
Зовнішня поверхня $r=3,40\text{м}$	Просторовий розрахунок	-11,103
	ЛПРА-САПР	-10,7
$\Delta, \%$		4,0
Серединна поверхня $r=3,25\text{м}$	Просторовий розрахунок	-11,256
	ЛПРА-САПР	$-2,4 \cdot 10^{-5}$
$\Delta, \%$		-
Внутрішня поверхня $r=3,10\text{м}$	Просторовий розрахунок	-11,460
	ЛПРА-САПР	-5,5
$\Delta, \%$		52,0

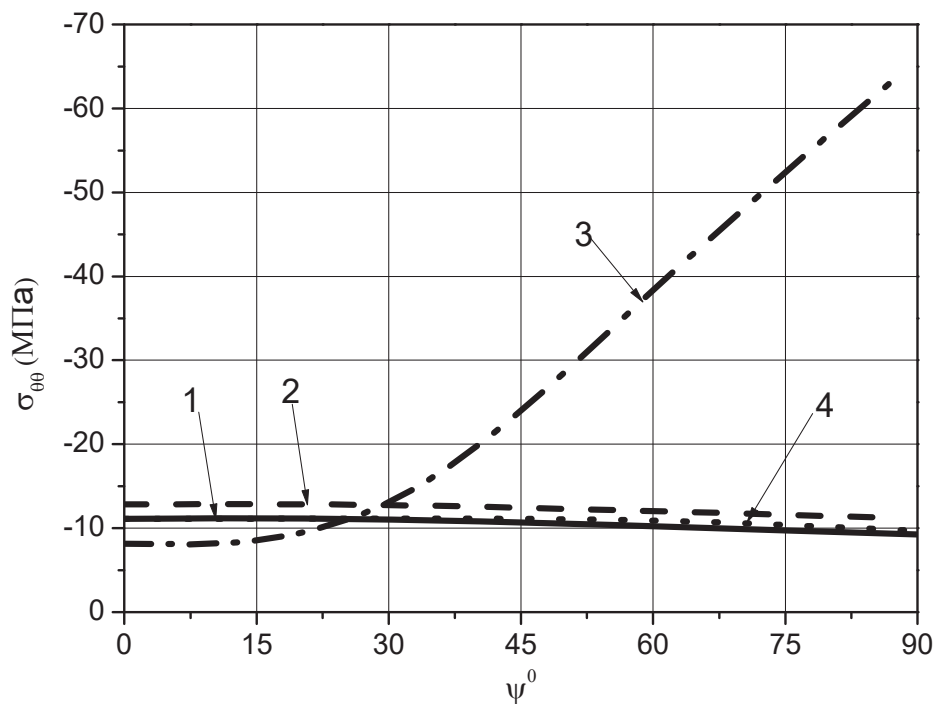


Рис. 2. Результати порівняння параметрів напруженого стану $\sigma_{\theta\theta}$ циліндричної оправи тунельної споруди

З аналізу результатів дослідження параметрів напружено-деформованого стану залізобетонної оправи тунельної споруди циліндричного профілю табл. 1 та рис. 2, можливо зауважити, що підсилення її внутрішньої поверхні волокнистим композитом веде до зміни величин напружень $\sigma_{\theta\theta}$ у коловому напрямку. Так для суцільної залізобетонної оправи (табл. 1) величини $\sigma_{\theta\theta}$ отримані згідно просторового підходу є більшими за визначені програмним комплексом ЛПРА-САПР 2024, розходження досягає 52%. В той же час напруження $\sigma_{\theta\theta}$ визначені для оболонкових конструкцій, з підсиленням шаром волокнистого композиту згідно системи (9) (рис. 2), при кутах $\psi=0^0, 30^0$ стають меншими за отримані згідно вказаного скінченно-елементного підходу, розбіжність знаходиться в межах 13%. При цьому $\sigma_{\theta\theta}$ здобуті за просторовим підходом при $\psi=60^0, 90^0$, в шарі боропластику, суттєво зростають у порівнянні із визначеними за програмним комплексом ЛПРА-САПР 2024, максимальне розходження досягає 85%.

Важливо відмітити, що розрахунок за запропонованою скінченно-елементною методикою не дозволив визначити та, відповідно, порівняти величини дотичних напружень $\tau_{z\theta}$, які можливо відшукати за запропонованим просторовим підходом.

Висновки. В роботі, запропоновано підхід до розв'язання важливої науково-технічної проблеми розрахунку циліндричної оправи тунельної споруди. Для цього було використано тривимірний чисельно-аналітичний та чисельний програмний комплекс ЛПРА-САПР 2024. За їх використання проведено дослідження напруженого стану циліндричної залізобетонної

оправи тунельної споруди. При цьому розглянуто варіант підсилення внутрішньої поверхні оправи волокнистим композитним матеріалом - боропластиком. Проведено розрахунки, порівняно та проаналізовано отримані результати для параметрів напруженого стану таких конструкцій в залежності від кута укладання волокнистого матеріалу.

1. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Задачи теории упругости неоднородных тел. – К.: Наук. думка, 1991. – 216 с.

Nryhorenko Ya.M., Vasylenko A.T., Pankratova N.D. Zadachy teoryy uprugosty neodnorodnykh tel. – K.: Nauk. dumka, 1991. – 216 s.

2. Семенюк М.П., Трач В.М., Подворний А.В. Напружено-деформований стан товстостінної анізотропної циліндричної оболонки // Прикл. механіка. – 2023. – 59, № 1. – С. 91–102.

Semeniuk M.P., Trach V.M., Podvornyi A.V. Napruzheno-deformovanyi stan tovtostinnoi anizotropnoi tsylindrychnoi obolonky // Prykl. mekhanika. – 2023. – 59, № 1. – S. 91–102.

3. Трач В.М., Подворний А.В., Хоружий М.М. Деформування та стійкість нетонких анізотропних оболонок: Монографія. – К.: Каравела. – 2019. – 274 с.

Trach V.M., Podvornyi A.V., Khoruzhyi M.M. Deformuvannia ta stiikist netonkykh anizotropnykh obolonok: Monohrafiia. – K.: Karavela. – 2019. – 274 s.

4. Баженов В.А. Комп'ютерні технології розрахунку просторових конструкцій при статичних і динамічних навантаженнях. В.А. Баженов, М.О. Вабіщевич, Ю.В. Ворона, С.О. Пискунов, А.В. Перельмутер, І.І. Солодей. К.: Каравела, 2018, 308 с.

Bazhenov V.A. Kompiuterni tekhnolohii rozrakhunku prostorovykh konstrukttsii pry statychnykh i dynamichnykh navantazhenniakh. V.A. Bazhenov, M.O. Vabishchevych, Yu.V. Vorona, S.O. Pyskunov, A.V. Perelmuter, I.I. Solodei. K.: Karavela, 2018, 308 s.

5. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. Рипол Классик, 1975, 542 с.
Zenkevych O. Metod konechnykh elementov v tekhnike. Rypol Klassyk, 1975, 542 s.

6. Програмный комплекс ЛІРА-САПР. Приклады розрахунку і проектування. К.: LIRALAND, 2023. 635 с.

Prohramnyi kompleks LIRA-SAPR. Pryklady rozrakhunku i proektuvannia. K.: LIRALAND, 2023. 635 s.

7. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.

Vasydzu K. Varyatsyonnye metody v teoryy uprugosty y plastychnosty. – M.: Myr, 1987. – 542 s.

8. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Наука, 1977. – 415 с.

Lekhnytskyi S.H. Teoryia uprugosty anyzotropnoho tela. – 2-e yzd., uspr. y dop. – M.: Nauka, 1977. – 415 s.